Concours blanc n°1 : Mathématiques
Lundi 16 Janvier 2023, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Problème n°1 : Etude d'une suite linéaire récurrence d'ordre 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 4 \quad u_1 = -5 \quad u_2 = 13 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Calculer v_0 et v_1.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

3. Déterminer l'expression de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3(-2)^n + 1$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

Problème n°2 : Calcul d'une somme

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. **a)** Montrer que $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Calculer u_3.

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n \geq n$.
Vérifier que cette inégalité est valide dans le cas $n = 0$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Dans cette question, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = n + u_n$.

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner une formule explicite de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire une expression explicite de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. **a)** Montrer, sans faire de récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{k+1} - 1}{2^k} = \frac{u_k - 1}{2^{k-1}} + \frac{k}{2^k}$$

b) En déduire, sans faire de récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ on a :

$$\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$$

c) Montrer, sans faire de récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

Problème n°3 : Etude d'une suite récurrente

On considère la fonction

$$f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)e^{x-1}$$

On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.
On admet que $2 < e < 3$.

Partie I : Etude et représentation graphique de f

1. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.

2. Etablir : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x + \dfrac{1}{x} > 0$.

3. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \dfrac{1}{x} > 0$.

4. En déduire le sens de variation de f.

5. Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

6. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

7. **Python :** Ecrire un programme Python permettant de tracer sur l'intervalle $[0,01; 5]$ les courbes représentatives de f et (T) avec un pas de $0,01$. Ajouter un titre et une légende.

Partie II : Etude d'une suite récurrente associée à f

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 2$.

9. **Python :** Ecrire un programme Python demandant à l'utilisateur un entier positif n et affichant la valeur de u_n.

10. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

11. Montrer, sans récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $e^{e^n - 1} \geq e$.
En déduire, sans récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $f(e^n) \geq e^{n+1}$.

12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n \geq e^n$.
Remarquer que cette relation est également vraie dans le cas $n = 0$.

13. En déduire le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

14. **Python :** Ecrire un programme Python affichant le plus petit entier positif n tel que $u_n > 10^{10}$.

Problème n°4 : Etude asymptotique de trois suites définies par une somme

Partie I : Etude des deux premières suites

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^\star$ et dresser son tableau de variation en faisant apparaître les limites.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_{n+1} - u_n = f(n)$.

d) En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$.

e) **Python :** Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la valeur de u_n.

```
import math as m
def suite(n):
    S=.....
    for k in range(.....):
        S=.....
    return S-m.log(n)
```

2. **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1 + x) \leq x$.
En déduire le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$.

c) Déduire des questions précédentes que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ converge vers une même limite qu'on notera γ. Justifier que $\gamma \in [0; 1]$.

Partie II : Etude d'une troisième suite

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ par

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$$

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$

2. Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad a_k = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{2k-1}$$

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ est la suite définie dans la partie I.

5. Justifier l'existence et déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆