Concours blanc n°1 : Mathématiques
Lundi 10 Janvier 2022, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Problème n°1 : Etude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Rappel : $\ln 2 \approx 0,7$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$, à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - x$$

On admet que f est dérivable sur $[0; 1]$.

a) Justifier que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f puis déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. **a)** Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$ (sans calculer les limites).

b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\ln(1 + x) \leq x$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, l'inégalité : $u_n \leq (\ln(2))^n$.

e) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Ecrire un programme python permettant de calculer u_{12}.

On pourra éventuellement s'aider du script suivant.

```
# Calcul de u_12
from math import*
u=.....
for i .....
     u=.....
print(.....)
```

Problème n°2 : Etude de suites définies par une somme

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Dans ce problème, on admet et on peut utiliser le fait que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leq x$.

Partie 1 : Dans cette question, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\ln(n+1) \leq u_n$.

3. Conclure quant au comportement asymptotique de la suite (u_n).

Partie 2 : Dans cette question, on étudie les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par :

$$a_n = u_n - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n - \frac{1}{n}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. En déduire son signe sur $\mathbb{R}_+^\star$.

c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $a_{n+1} - a_n = f(n)$. En déduire la monotonie de (a_n).

d) Recopier et compléter la fonction python ci-dessous pour que l'appel de la fonction `suite(n)` renvoie la valeur de a_n :

```
from math import*
def suite(n):
    S=.....
    for i .....
        S=.....
    S=S-log(n)
    return S
```

2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire la monotonie de (b_n).

3. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite, que l'on notera γ, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $b_n \leq \gamma \leq a_n$

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $|a_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.

5. Recopier et compléter le programme python ci-dessous afin qu'il demande à l'utilisateur un réel `epsilon` strictement positif et renvoie une valeur approchée de γ à `epsilon` près. On utilisera la fonction `suite(n)` définie à la question **1.d)**.

```
epsilon=.....
i=.....
while.....
    i=.....
print(.....)
```

Problème n°3 : Suites et matrices

Partie 1

On considère les matrices :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On pose également $A = \Delta + N$.

1. Calculer N^2. En déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

2. **a)** Calculer $P^3 - P^2 + 2P$. En déduire que P est inversible et vérifier que $P^{-1} = Q$.

b) Déterminer une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que : $PD = \Delta P$.
En déduire que $\Delta = PDP^{-1}$.

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^n = PD^nP^{-1}$.

d) En déduire les neuf coefficients de Δ^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. **a)** Vérifier que $\Delta N = N\Delta = N$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $A^n = \Delta^n + nN$.

c) En déduire les neuf coefficients de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Partie 2

Dans cette partie, on considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 1, \quad w_0 = 1, \quad \text{et : } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & - & w_n \\ v_{n+1} & = & -\ 2u_n & & & + & 2w_n \\ w_{n+1} & = & & & & & w_n \end{array} \right.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice de la **Partie 1**.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

3. En utilisant le résultat de la question **3.c)** de la partie précédente, déterminer l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie 3

Dans cette partie, on propose une autre méthode afin d'étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la **Partie 2**.

1. **a)** En utilisant la définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer directement la valeur de w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

2. On introduit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour, tout $n \in \mathbb{N}$, par $r_n = u_n + v_n$.

a) Etablir que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.

b) En déduire l'expression de $u_n + v_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. On introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour, tout $n \in \mathbb{N}$, par $r_n = 2u_n + v_n$.

a) Etablir que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.

b) En déduire l'expression de $2u_n + v_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant les questions **2.** et **3.**, retrouver les résultats de la question **3.** de la **Partie 2**.

Problème n°4 : Recherche des racines carrées d'une matrice

L'objectif de ce problème est résoudre l'équation, d'inconnue $Z \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$Z^2 = A \tag{1}$$

où $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad 0 < a < 1.$$

1. Dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{5}{8}$, c'est-à-dire $A = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$.

- **a)** Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
- **b)** Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que D est diagonale.

2. On se place désormais dans la cas général, c'est-à-dire lorsque $A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$ où a est un réel quelconque vérifiant $0 < a < 1$.

- **a)** Montrer que la matrice $D_a = P^{-1}AP$ est diagonale. Exprimer D_a en fonction de a.
- **b)** Soient $Z \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $Y = P^{-1}ZP$. Donner l'expression de Z en fonction de Y, P et P^{-1}, puis montrer que l'équation (1) est équivalente à :

$$Y^2 = D_a \tag{2}$$

3. On cherche à résoudre l'équation (2) en prenant Y sous la forme générale :

$$Y = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

- **a)** Ecrire un système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z, t qui est équivalent à l'équation (2).
- **b)** Montrer qu'aucune solution $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ du système ne vérifie $x + t = 0$.

  Indication : On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe une solution (x, y, z, t) telle que $x + t = 0$. Montrer que cela aboutit à une contradiction.
- **c)** Résoudre le système obtenu à la question {3.a)} et en déduire les solutions $Y = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ de l'équation (2) en fonction du paramètre a.

  Indication : la discussion fera apparaître trois cas : $0 < a < \dfrac{1}{2}$, $a = \dfrac{1}{2}$ *et* $\dfrac{1}{2} < a < 1$.

4. En déduire que l'équation (1) admet respectivement aucune, deux ou quatre solutions suivants les trois cas ci-dessus. Il n'est pas demandé d'expliciter ces solutions.

5. Donner les quatre solutions de l'équation (1) dans la cas où $a = \dfrac{5}{8}$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆