Concours blanc n°1 : Mathématiques
Lundi 13 Janvier 2025, de 8h à 12h

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\star) \qquad u_0 = 4, \quad u_1 = -5, \quad u_2 = 13 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Calculer v_0 et v_1.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

3. En déduire une expression explicite de v_n en fonction de n.

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3$, puis une expression explicite de u_n en fonction de n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

6. En utilisant la relation de récurrence $(\star)$, écrire une fonction Python `suite(n)` prenant en argument un entier positif n et qui renvoie la valeur de u_n.

7. Expliquer l'intérêt du script suivant :

```
n = 100
x = 4
y = x
for k in range(n+1):
      x = -2*x+3
      y += x
print(y)
```

Exercice n°2 : ESCP 2010 ECT (exercice 2)

1. Soient A, J et I les trois matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Déterminer deux réels a et b tels que $A = aJ + bI$.

b) Calculer J^2 en fonction de J.

c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$A^n = (-2)^n I + \frac{1}{2}\left(4^n - (-2)^n\right) J.$$

d) Donner l'expression explicite de A^n sous forme d'une matrice carrée d'ordre 2.

2. On note $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ les deux suites définies par $v_0 = 3$, $w_0 = 1$ et les relations suivantes, valables pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 3v_n + w_n \end{cases}$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $X_n = \begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix}$.

- **a)** Déterminer X_0.
- **b)** Etablir par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
- **c)** En déduire l'expression de X_n en fonction de n.
- **d)** Calculer les valeurs de v_n et de w_n en fonction de n.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 3$ et la relation suivante, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{3u_n + 1}.$$

- **a)** A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :

$$u_n = \frac{v_n}{w_n}.$$

- **b)** Donner l'expression de u_n en fonction de n.
- **c)** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice n°3 : EML 2011 ECE (exercice 2 partie I)

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Partie 1 : Diagonalisation de A

1. Justifier que A n'est pas inversible.
2. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D telle que $PD = AP$.
3. Justifier que P est inversible et expliciter P^{-1}. En déduire que $A = PDP^{-1}$.

Partie 2 : Détermination d'une racine carrée de A

Objectif : Déterminer une matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

4. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ telle que $\Delta^2 = D$.
5. On note $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer $R^2 = A$ et calculer R.

Exercice n°4 : EML 2011 ECE (exercice 1 parties I et II)

On considère la fonction

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)e^{x-1}$$

On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

Partie 1 : Etude de f

1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Etablir : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad \ln x + \dfrac{1}{x} > 0.$
3. En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \dfrac{1}{x} > 0.$
4. En déduire le sens de variation de f.
5. Montrer que 1 est point fixe de f. *On admet que 1 est le seul point fixe de f.*
6. Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0, la limite de f en $+\infty$ et le point fixe.

Partie 2 : Etude d'une suite récurrente associée à f

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 2$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

9. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

10. Etablir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n$. Retrouver la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Problème : EDHEC 2001 ECE (Problème)

Partie 1

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall x \in [0;1[,\ \ln(1-x) \leq -x$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Déduire de la question précédente que $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $v_n \leq \ln(n) + 1$.

Partie 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

4. **a)** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. **a)** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \dfrac{1}{u_k^2}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $u_n^2 = 2n + 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n^2 \geq 2n + 2$. En déduire la limite de la suite (u_n).

6. **a)** A l'aide des résultats précédents, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on a

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

Indication : On pourra commencer par montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\dfrac{2}{u_k^2} \leq \dfrac{1}{k}$.

b) En utilisant la partie 1, établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on a

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

c) En déduire finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

Partie 3

7. Ecrire une fonction Python `suite(n)` prenant en argument un entier positif n et renvoyant la valeur de u_n.

8. **a)** Ecrire un programme Python qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 100$.

b) On donne : $\ln(2) \leq 0,7$ et $\ln(5) \leq 1,61$. En déduire un majorant de $\ln(5000)$.

c) Montrer que l'entier n trouvé en **8.a)** est compris entre 4995 et 5000.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆