

Exercice n°1 :

1) $v_0 = u_1 + 2u_0 = 3$

$v_1 = u_2 + 2u_1 = 3$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $v_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2}$

$= 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}$

D'autre part : $2v_{n+1} - v_n = 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n)$

$= 2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n$

Donc : $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$

3) La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est linéaire récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $x^2 - 2x + 1 = 0$ d'unique racine 1. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (\lambda n + \mu) 1^n = \lambda n + \mu$

De plus : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 3 \\ \lambda + \mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 3 \end{cases}$ Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+2} = -2u_n + v_n = -2u_n + 3$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est arithmético-géométrique. Son expression explicite est :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 3(-2)^n$

5) $S_n = \sum_{k=0}^n (1 + 3(-2)^k) = \sum_{k=0}^n 1 + 3 \sum_{k=0}^n (-2)^k$ [par linéarité]
 $= n+1 + 3 \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)}$
 $= n+2 - (-2)^{n+1}$

6) def suite (n) :

$u0 = 4$

$u1 = -5$

$u2 = 13$

for k in range(n)

$v = u$

$w = u1$

$u2 = 3 * u1 - 2 * u0$

$u1 = v$

$u0 = w$

return u0

7) Le script sert à calculer $S_{100} = \sum_{k=0}^{100} u_k$.

(2)

Exercice n°2:

1) a) On a: $A = 3J - 2I$. Il suffit de poser $a=3$ et $b=-2$.

b) $J^2 = 2J$.

c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $A^n = (-2)^n I + \frac{1}{2}(4^n - (-2)^n)J$ ".

• $P(0)$ vraie car: $(-2)^0 I + \frac{1}{2}(4^0 - (-2)^0)J = I = A^0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } A^{n+1} &= A \times A^n = A \left((-2)^n I + \frac{1}{2}(4^n - (-2)^n)J \right) \quad [\text{par hypothèse}] \\ &= (3J - 2I) \left((-2)^n I + \frac{1}{2}(4^n - (-2)^n)J \right) \\ &= 3(-2)^n J + \frac{3}{2}(4^n - (-2)^n)J^2 + (-2)^{n+1} I - (4^n - (-2)^n)J \\ &= \left[3(-2)^n + 3(4^n - (-2)^n) - (4^n - (-2)^n) \right] J + (-2)^{n+1} I \\ &= (-2)^{n+1} I + (2 \cdot 4^n + (-2)^n)J \quad [\text{car } J^2 = 2J] \\ &= (-2)^{n+1} I + \frac{1}{2}(4^{n+1} - (-2)^{n+1})J. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ vraie

• Par le principe de récurrence, $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$d) A^n = \begin{bmatrix} \frac{4^n + (-2)^n}{2} & \frac{4^n - (-2)^n}{2} \\ \frac{4^n - (-2)^n}{2} & \frac{4^n + (-2)^n}{2} \end{bmatrix}.$$

$$2) a) X_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $X_n = A^n X_0$ ".

• $P(0)$ vraie car: $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } X_{n+1} &= \begin{bmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n + 3w_n \\ 3v_n + w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X_n \\ &= A X_n \\ &= A \times A^n X_0 \quad [\text{par hypothèse}] \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ vraie.

(3)

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a: $X_n = A^n X_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4^n + (-2)^n & 4^n - (-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & 4^n + (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Donc $\begin{cases} v_n = \frac{1}{2} (4^{n+1} - (-2)^{n+1}) \\ w_n = \frac{1}{2} (4^{n+1} + (-2)^{n+1}) \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4^{n+1} - (-2)^{n+1} \\ 4^{n+1} + (-2)^{n+1} \end{bmatrix}$

3) a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n = \frac{v_n}{w_n}$ ".

• $P(0)$ vraie car $\frac{v_0}{w_0} = \frac{3}{1} = 3 = u_0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On a: $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{3u_n + 1} = \frac{\frac{v_n}{w_n} + 3}{3\frac{v_n}{w_n} + 1} = \frac{v_n + 3w_n}{3v_n + w_n} = \frac{v_{n+1}}{w_{n+1}}$.

Donc $P(n+1)$ vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a: $u_n = \frac{v_n}{w_n} = \frac{4^{n+1} - (-2)^{n+1}}{4^{n+1} + (-2)^{n+1}}$.

c) On a: $u_n = \frac{4^{n+1} - (-2)^{n+1}}{4^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \frac{4^{n+1} (1 - (-\frac{1}{2})^{n+1})}{4^{n+1} (1 + (-\frac{1}{2})^{n+1})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

car $|\frac{1}{2}| < 1$ et $(-\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice n°3 :

Partie 1:

1) A possède deux colonnes identiques, elle n'est pas inversible ($A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{3,1}$)

2) Soit $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a:

$P D = A P \iff \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$

Donc $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(4)

$$3) \text{ Gra: } \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L]{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Donc P est inversible

$$\text{et } P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L]{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} 3 \text{ pivots non nuls} \\ P \text{ est inversible} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[L]{L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[L]{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5/6 & -1/6 & -1/3 \\ 0 & 2 & 0 & 2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[L]{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{array} \right]$$

Partie 2:

$$4) \text{ Soit } \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ . Gra a bien: } \Delta^2 = \begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$5) \text{ Gra: } R^2 = (P \Delta P^{-1})^2 = P \Delta \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} \Delta P^{-1} = P \Delta^2 P^{-1} = P \Delta P^{-1} = A$$

$$R = P \Delta P^{-1}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice n° 4.

Partie 1:

$$1) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}_+^*. \text{ Gra: } f'(x) = (x + \ln x)' e^{x-1} + (x + \ln x)(e^{x-1})' \\ = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln x) e^{x-1} \\ = \left(x + \ln x + \frac{1}{x} + 1\right) e^{x-1}$$

2) On considère la fonction dérivable $g: x \mapsto \ln x + \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. (5)

On a: $\forall n \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$. Le signe de $g'(n)$ est le signe de $n-1$. On a:

Donc: $\forall n \in \mathbb{R}_+^*$, $g(n) \geq 1 > 0$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
g			

Par conséquent: $\forall n > 0$, $\ln n + \frac{1}{n} > 0$.

3) Soit $n \in \mathbb{R}_+^*$. On a: $n+1 \geq 1 > 0$. Donc:

$\ln n + \frac{1}{n} + n+1 > \ln n + \frac{1}{n} > 0$. D'où l'inégalité recherchée.

4) Le signe de $f'(n)$ est le signe de $\ln n + \frac{1}{n} + n+1$ (car $e^{n-1} > 0$).

Par conséquent: $\forall n > 0$, $f'(n) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) On a: $f(1) = (1 + \ln 1)e^0 = 1$. Donc 1 point fixe de f .

6) On a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. D'où:

x	0	1	$+\infty$
f			

Partie 2:

7) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " u_n bien définie (et) $u_n \geq 2$ ".

• $P(0)$ vraie car u_0 bien définie par hypothèse et $u_0 = 2$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Comme u_n bien définie et $u_n \geq 2$ par hypothèse, on a, en particulier $u_n > 0$.

Donc $f(u_n) = u_{n+1}$ existe. De plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi $f(u_n) \geq f(2)$ i.e. $u_{n+1} \geq (2 + \ln 2)e^1 > 2$ (car $\ln 2 > 0$, $e^1 > 1$).

Donc $P(n+1)$ est vraie.

8) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n \leq u_{n+1}$ ". ⑥

• $P(0)$ vraie car $u_0 = 2$ et $u_1 = (2 + \ln 2)e^2 > u_0$ (voir question précédente).

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On suppose que $u_n \leq u_{n+1}$. Or, par 7) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$ et, par 4), f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc : $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ i.e. $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Donc $P(n+1)$ vraie.

Par conséquent, $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

9) La suite (u_n) étant croissante, elle possède une limite par le théorème de la limite monotone. Supposons que cette limite soit finie et notons cette limite l . Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$, on a : $l \geq 2$. D'autre part, par passage à la limite dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient : $l = f(l)$ et l est un point fixe de f . Or, par 4), f possède un unique point fixe qui est 1. Donc $l = 1$ ce qui est en contradiction avec $l \geq 2$.

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

10) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n \geq e^n$ ".

• $P(0)$ vraie car $u_0 = e \geq 1 = e^0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On a par hypothèse : $e^n \leq u_n$ et on sait que $e \leq u_n$.

Ainsi $e^{u_n-1} \geq e^{e-1} \geq e$ et $u_n + \ln(u_n) \geq u_n + \ln 2 \geq u_n$.

Donc, par produit d'inégalités à termes positifs :

$$f(u_n) = (u_n + \ln(u_n)) e^{u_n-1} \geq e \times u_n \geq e \times e^n = e^{n+1}$$

puis $u_{n+1} \geq e^{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Comme $e^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Le théorème de minoration nous assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Problème Partie 1 :

(7)

1) On considère la fonction $h: x \mapsto \ln(1-x) + x$ définie et dérivable sur $[0, 1[$.

$$\text{On a: } \forall x \in [0, 1[, h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } -x \in]-1; 0] \\ \text{et } 1-x \in]0; 1] \end{array} \right)$$

Donc h est décroissante sur $[0, 1[$ et comme $h(0) = \ln(1-0) + 0 = 0$, on déduit que: $\forall x \in [0, 1[, h(x) \leq h(0)$ i.e. $\ln(1-x) \leq -x$.

2) On a $\frac{1}{k+1} \in [0, 1[$. L'inégalité précédente donne: $\ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \leq -\frac{1}{k+1}$

$$\text{i.e. } \frac{1}{k+1} \leq -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -(\ln(k) - \ln(k+1)) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

$$\text{Donc } \underline{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. On sait que: $\forall k \in [1, n-1], \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$.

En sommant ces inégalités, on obtient:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

La somme de droite est télescopique et donne: $\ln((n-1)+1) - \ln(1) = \ln(n)$.

La somme de gauche, après échangeant d'indice $i = k+1$, donne: $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = v_n - 1$.

$$\text{Donc: } v_n - 1 \leq \ln n \quad \text{i.e. } \underline{v_n \leq \ln n + 1}.$$

Cette inégalité est vraie dans le cas $n=1$ car $v_1 = 1$ et $\ln(1) + 1 = 1$.

Partie 2 :

4) a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "un bien défini (et) $u_n > 0$ ".

• $P(0)$ vraie car u_0 bien défini par hypothèse et $u_0 = 1 > 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par hypothèse u_n bien défini et $u_n > 0$, donc $\frac{1}{u_n} > 0$ existe et

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0$ existe également. $P(n+1)$ est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 0$, On a:

(8)

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

5) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \left(u_k + \frac{1}{u_k} \right)^2 - u_k^2 = \left(u_k^2 + 2u_k \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_k^2} \right) - u_k^2 \\ &= 2 + \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. En sommant les égalités précédentes pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{u_k^2} \right)$$

La somme de gauche est télescopique et est égale à : $u_n^2 - u_1^2 = u_n^2 - 4$.
Par linéarité, la somme de droite donne : $\sum_{k=1}^{n-1} 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = 2n-2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

D'où : $u_n^2 - 4 = 2n-2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$, on en déduit : $u_n^2 = 2n+2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

c) Pour $n=1$, $u_1^2 = 4 \geq 2 \cdot 1 + 2$.

Pour $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 0$ (c'est une somme de réels positifs).

d'où : $u_n^2 = 2n+2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 2n+2$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n \geq \sqrt{2n+2}$ car $u_n > 0$. Comme $\sqrt{2n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

le théorème de minoration nous assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6) a) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a, par 5) c), $u_k^2 \geq 2k+2$, ainsi

$$\frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k+2} \leq \frac{1}{2k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, en sommant les inégalités précédentes pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on trouve : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} H_{n-1}$.

Enfin, on déduit de 5)b) que:

(9)

$$u_n^2 = 2n+2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k}}_{\leq 2n+2 + \frac{1}{2}v_{n-1}}$$

b) De 3), on a: $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, v_n \leq \ln(n)+1$, donc pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$,
on a: $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}, v_{n-1} \leq \ln(n-1)+1$. On déduit alors de 6)a)

que:

$$u_n^2 \leq 2n+2 + \frac{1}{2}v_{n-1} \leq \underbrace{2n+2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1)+1)}_{= 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)}$$

c) De 5)c) et 6)c), on déduit que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}, 2n+2 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

puis que: $1 + \frac{1}{n} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq 1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}$

et enfin que: $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}}$

Par croissances comparées $\frac{\ln(n-1)}{4n} = \frac{\ln n}{4n} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \text{ et } \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1$

Partie 3:

7) def suite(n)

u = 1

for k in range(n):

u = u + 1/u

return u

8) a) $n = 0$
 while suite(n) < 100:
 $n = n + 1$
 print(n)

(10)

b) On a: $\ln(5000) = \ln(5^4 \times 2^3) = 3 \ln 2 + 4 \ln 5 \leq \underbrace{3 \times 0,7 + 4 \times 1,61}_{= 8,54}$

c) La suite (u_n) étant strictement croissante (voir 4.b)), il suffit de vérifier que $u_{4994} < 100$ et $u_{5000} \geq 100$.

Or, par 6.b),

$$\begin{aligned} u_{4994}^2 &\leq 2 \times 4994 + \frac{5}{2} + \frac{\ln(4993)}{2} \\ &< 9990,5 + \frac{\ln(5000)}{2} \quad \left[\text{car } \ln \text{ strictement croissant sur } \mathbb{R}_+^* \right] \\ &\leq 9990,5 + \frac{8,54}{2} \\ &\leq 10000 \end{aligned}$$

Donc $u_{4994} < \sqrt{10000} = 100$.

De plus, par 5.c), $2 \times 5000 + 2 \leq u_{5000}^2$ i.e. $\sqrt{10002} \leq u_{5000}$
 et donc $\underline{100 \leq u_{5000}}$. Ce qui conclut cette question.