# Concours blanc n°1 (Correction)

## Problème n°1

1) Soient $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ -x + y = b \\ -x + z = c \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff}} \begin{cases} x + y - z = a \\ 2y - z = a + b \\ y = a + c \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \cdots}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff}} \begin{cases} x + y - z = a \\ y = a + c \\ -z = -a + b - 2c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - b + c \\ y = a + c \\ z = -a - b + 2c \end{cases} \iff X = P^{-1} Y$$

[Ce système linéaire échelonné possède 3 pivots non nuls, donc $P$ inversible]

avec $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2) $D_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $D_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $A = PD_1P^{-1}$, $B = PD_2P^{-1}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$Y_{n+2} = \frac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \frac{1}{6} D_2 Y_n \underset{(P \text{ inversible})}{\iff} P^{-1} X_{n+2} = \frac{1}{6} D_1 P^{-1} X_{n+1} + \frac{1}{6} D_2 P^{-1} X_n$$

$$\iff X_{n+2} = \frac{1}{6} P D_1 P^{-1} X_{n+1} + \frac{1}{6} P D_2 P^{-1} X_n$$

$$\iff X_{n+2} = \frac{1}{6} A X_{n+1} + \frac{1}{6} B X_n$$

Cette dernière égalité étant vraie, la première l'est par équivalence.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \frac{1}{6} D_2 Y_n = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1/2) a_{n+1} \\ (1/2) b_{n+1} \\ (2/3) c_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1/2) a_n \\ 0 \\ (1/3) c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2) a_{n+1} + (1/2) a_n \\ (1/2) b_{n+1} \\ (2/3) c_{n+1} + (1/3) c_n \end{bmatrix}$$

Le résultat de la question 2) nous assure que :

$$Y_{n+2} = \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)a_{n+1} + (1/2)a_n \\ (1/2)b_{n+1} \\ (2/3)c_{n+1} + (1/3)c_n \end{bmatrix} \quad \text{ie} \quad \underline{\begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} = \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{cases}}.$$

5) $\underline{Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$.

6)
```
def suitean(n) :
    a0 = 2
    a1 = 1
    for k in range(n) :
        z = a1
        a1 = a0 + a1
        a0 = z
    return a0
```

7) □ Calcul de $a_n$ : La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est linéaire récurrente d'ordre 2, son équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ a pour racine : $1$ et $-\frac{1}{2}$.

On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Déterminons $\lambda$ et $\mu$. Or a :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -\frac{3}{2}\mu = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{4}{3} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

□ Calcul de $b_n$ : La suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de premier terme $b_1 = 1$ et de raison $\frac{1}{2}$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. D'autre part $b_0 = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$, donc : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

□ Calcul de $c_n$ : La suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ est linéaire récurrente d'ordre 2, son équation caractéristique $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ a pour racines $1$ et $-\frac{1}{3}$.

On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Déterminons $\lambda$ et $\mu$. On a :

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \frac{1}{3}\mu = -1 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\frac{4}{3}\mu = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Donc : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \ c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

8) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $Y_n = P^{-1}X_n$, on a : $X_n = PY_n$. Ainsi :

$$X_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 + 2/3(-1/2)^n \\ (1/2)^{n-1} \\ -1/2 + 3/2(-1/3)^n \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 11/6 + 2/3(-1/2)^n + (1/2)^{n-1} - 3/2(-1/3)^n \\ -4/3 - 2/3(-1/2)^n + (1/2)^{n-1} \\ -11/6 - 2/3(-1/2)^n + 3/2(-1/3)^n \end{bmatrix}}.$$

9) La suite représentée par des croix ($\times$) semble converger vers une valeur entre 1,5 et 2, celle représentée par des motifs ($\oplus$) semble converger vers une valeur entre $-1,5$ et $-1$, et celle représentée par des carrés (◆) semble converger vers une valeur entre $-2$ et $-1,5$.

D'autre part :

$$\alpha_n = \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{11}{6} \quad \left[\text{car } \left|-\tfrac{1}{2}\right| < 1, \ \left|\tfrac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } \left|-\tfrac{1}{3}\right| < 1\right]$$

$$\beta_n = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{4}{3} \simeq -1,3$$

$$\gamma_n = -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{11}{6} \simeq -1,8$$

On en déduit que $(\alpha_n)$ est représentée par $\times$, $(\beta_n)$ par $\oplus$ et $(\gamma_n)$ par ◆.

Problème n°2 :

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ : " $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, ainsi $0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1$ [par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$], puis $1 \leqslant 1 + u_n^2 \leqslant 2$, d'où $\ln(1) \leqslant \ln(1+u_n^2) \leqslant \ln(2)$ [par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$] et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \ln(2) < 0{,}7 \leqslant 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) On a : $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - 1 = \dfrac{2x - x^2 - 1}{1+x^2} = -\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2} \leqslant 0$.

De plus : $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ |
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $(\ln 2) - 1$ |

Donc : $\forall x \in [0;1]$, $(\ln 2) - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0$

et $\underline{f(x) \text{ est négatif sur } [0;1]}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait par 1) que $u_n \in [0;1]$, par conséquent 2)a) implique que $f(u_n) \leqslant 0$. Donc $\ln(1+u_n^2) - u_n \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc $\underline{(u_n)_{n \geqslant 0} \text{ décroissante}}$.

3) a) On considère $h : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ défini et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$. Donc $h$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) \leqslant h(0) = 0$.

Donc : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ln(1+x) \leqslant x}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n^2 \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité 3) a) nous assure que : $\ln(1+u_n^2) \leqslant u_n^2$ ie $\underline{u_{n+1} \leqslant u_n^2}$.

c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ la propriété $P(n)$ : " $u_n \leq (\ln 2)^n$ "

- $P(1)$ est vraie car $u_1 = \ln(1+u_0) = \ln 2$, donc $u_1 \leq (\ln 2)^1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On sait par 2) b) que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, ainsi : $u_n \leq u_1$ ie $u_n \leq \ln 2$. De plus $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive par 1), donc :

$$0 \leq u_n \leq \ln 2 \quad (*)$$

D'autre part, par hypothèse de récurrence, on a : $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$ $(**)$
En multipliant membre à membre les inégalités à termes positifs $(*)$ et $(**)$ on trouve : $0 \leq u_n^2 \leq (\ln 2)^{n+1}$. Or, par 3) b), $u_{n+1} \leq u_n^2$, donc, par transitivité, $u_{n+1} \leq (\ln 2)^{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie

- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Comme $0,6 < \ln 2 < 0,7$, on a : $|\ln 2| < 1$ et $(\ln 2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et comme, par 1) et 3) c) : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$, le théorème d'encadrement nous assure que $\underline{(u_n)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0}$.

4)
```
u = 1
for i in range(12):
    u = log(1+u**2)
print(u)
```

## Problème n°3 :

1) a) $\det P = 1\times 1 - (-1)\times 1 = 2 \neq 0$, donc P est inversible.

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) a) $D_a = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Donc $A = P D_a P^{-1}$.

b) On a : $Z = P Y P^{-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} Z^2 = A &\iff (PYP^{-1})^2 = PD_aP^{-1} \\ &\iff PY\underbrace{P^{-1}P}_{I_2}YP^{-1} = PD_aP^{-1} \\ &\iff PY^2P^{-1} = PD_aP^{-1} \\ &\overset{P \text{ inversible}}{\iff} P^{-1}(PY^2P^{-1})P = P^{-1}(PD_aP^{-1})P \\ &\iff Y^2 = D_a. \end{aligned}$$

3) a) On a : $Y^2 = D_a \iff \begin{bmatrix} x^2+yz & y(x+t) \\ z(x+t) & yz+t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x^2+yz = 2a-1 \\ y(x+t) = 0 \\ z(x+t) = 0 \\ t^2+yz = 1 \end{cases}$$

Dans la suite, on note (S) ce système.

b) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ solution de (S) tel que $x+t=0$.

Dans ce cas $x=-t$ et (S) équivaut à $\begin{cases} t^2+yz = 2a-1 \\ t^2+yz = 1 \end{cases}$

autrement dit $2a-1=1$, ou encore $a=1$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $0<a<1$. En conclusion si $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ est solution de (S), on a nécessairement $x+t\neq 0$.

c) Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x+t \neq 0$, on a :

$$(S) \iff \begin{cases} x^2 + yz = 2a-1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t^2 + yz = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2a-1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2a-1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \text{ ou } t = -1 \end{cases}$$

Trois cas sont envisageables :

- 1er cas $0 < a < \frac{1}{2}$ : on a $2a - 1 < 0$ et l'équation $x^2 = 2a-1$ n'a aucune solution. Par suite, (S) n'a pas de solution.

- 2ème cas $a = \frac{1}{2}$ : On a $2a-1 = 0$ et l'équation $x^2 = 2a-1$ a pour unique solution 0. Par suite, (S) possède deux solutions : $(0,0,0,1)$ et $(0,0,0,-1)$.

- 3ème cas $\frac{1}{2} < a < 1$ : On a $2a-1 > 0$ et l'équation $x^2 = 2a-1$ possède deux solutions : $\sqrt{2a-1}$ et $-\sqrt{2a-1}$.
  Par suite, (S) possède quatre solutions :
  $(\sqrt{2a-1},0,0,1)$, $(\sqrt{2a-1},0,0,-1)$, $(-\sqrt{2a-1},0,0,1)$, $(-\sqrt{2a-1},0,0,-1)$

4) Chaque quatruplet solution de (S) est associé à une matrice Y solution de (2). La question 2)b), nous assure alors que les solutions de (1) seront données par $Z = PYP^{-1}$. Il y aura donc 4 solutions dans le cas $\frac{1}{2} < a < 1$, 2 dans le cas $a = \frac{1}{2}$ et aucune dans le cas $0 < a < \frac{1}{2}$.

5) Si $a = \frac{5}{8} \in \left]\frac{1}{2};1\right[$, il y a 4 solutions données par $\left(\sqrt{2a-1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\right)$ :

$$P\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}, \quad P\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1}, \quad P\begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1} \text{ et } P\begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1}$$

ie $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

# Problème n°4 :

## Partie 1 :

1) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a : $\frac{1}{k} \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, on déduit de l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leq x$, l'inégalité : $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ ie $\ln\left(\frac{1+k}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$, ou encore : $\underline{\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. D'après 1), on a : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
En sommant ces inégalités membres à membre, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Le membre de gauche est une somme télescopique, on déduit que :

$$\underline{\ln(n+1) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n}$$

3) Comme $\ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ \ln(n+1) \leq u_n$, le Théorème de minoration nous assure que $\underline{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

## Partie 2 :

1)a) $\underline{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$ et $f(x) = \frac{1}{1+x} + \ln(x) - \ln(x+1)$

$$= \frac{1}{1+x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(1+x)^2} > 0$.

Donc $\underline{f \text{ est (strictement) croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Etant que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on a : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) < 0}$

Donc $\underline{f \text{ est (strictement) négative sur } \mathbb{R}_+^*}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= u_{n+1} - \ln(n+1) - (u_n - \ln(n)) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= f(n) < 0 \quad [\text{par } 2)1)a)] \end{aligned}$$

Donc $(a_n)$ est décroissante.

d)
```
def suite(n):
    S = 0
    for i in range(1,n+1):
        S = S + 1/i
    S = S - log(n)
    return S
```

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a : 

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(a_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= (a_{n+1} - a_n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0 \quad [\text{par } 1)1)] \end{aligned}$$

b) Donc $(b_n)$ est croissante.

3) La suite $(a_n)$ est décroissante [2)1)c)]
$(b_n)$ est croissante [2)2)b)] et

$$a_n - b_n = a_n - \left(a_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes.
Le Théorème des suites adjacentes nous assure que $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers une même limite $\gamma$, tel que : $\forall n, m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $b_n \leq \gamma \leq a_m$.

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $b_n \leq \gamma \leq a_n$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Par 3), on a : $b_n \leqslant \gamma \leqslant a_n$.

Par conséquent : $-a_n \leqslant -\gamma \leqslant -b_n$, puis $0 \leqslant a_n - \gamma \leqslant a_n - b_n = \frac{1}{n}$.

Donc $\underline{|a_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{n}}$.

5)
```
epsilon = float(input("Entrez un réel strictement positif"))
i = 1
while 1/i > epsilon:
    i = i+1
print(suite(i))
```