Concours blanc n°2 : Mathématiques

Mercredi 8 Juin 2022, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice : Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

On considère l'application f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+y) \end{array}.$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et donner $\dim(\text{Ker}(f))$.
3. En déduire le rang de f.
4. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Problème n°1 : Etude de variables aléatoires finies (ECRICOME 2018 voie ECT)

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U ;
- tous les tirages s'effectuent **avec remise** de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre urne** ;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même urne**.

Partie I : Etude de l'urne du n-ième tirage

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U ».
Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $P(U_1) = 1$.

1. Donner $P(U_2)$.
2. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$. A l'aide de la formule des probabilités totales, déduire $P(U_3)$.
3. **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, que valent $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$: $P(U_{n+1}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}P(U_n)$.
   De quel type usuel est la suite $(P(U_n))_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$?

   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue ℓ : $\ell = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}\ell$.

   d) Déterminer alors la valeur de $P(U_n)$ en fonction de n.

   e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n)$.

Partie II : Etude du nombre de boules blanches

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

4. Reconnaître la loi de X_1. Vous préciserez $X_1(\Omega)$ et, pour tout $k \in X_1(\Omega)$, $P(X_1 = k)$.

5. **a)** Donner les valeurs de $P_{[X_1=0]}(X_2 = 0)$, $P_{[X_1=0]}(X_2 = 1)$, $P_{[X_1=1]}(X_2 = 1)$, $P_{[X_1=1]}(X_2 = 2)$.

b) En déduire la loi de X_2. On vérifiera que $P(X_2 = 1) = \dfrac{13}{18}$.

c) Vérifier que : $E(X_2) = \dfrac{19}{18}$.

6. On rappelle qu'en Python, l'instruction `rd.randint(1,k+1)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k. Recopier et compléter les lignes à pointillés du script Python ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
import numpy.random as rd
def simulation():
     tirage1=rd.randint(1,4)
     if tirage1<3:
          res1=1
          tirage2=rd.randint(1,5)
          if tirage2==1:
               res2=1
          else:
               res2=0
     else:
          res1=0
          tirage2=.....
          if tirage2<3:
               res2=.....
          else:
               res2=.....
     return res1+res2
```

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n = 0)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Expliquer pourquoi, après avoir obtenu au cours de n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans U.

On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans V.

9. A l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$:

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0) \qquad (\star\star).$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose : $u_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$.

Déduire de la relation $(\star\star)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

11. **a)** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a

$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$.

Problème n°2 : Autour de deux suites d'intégrales (EDHEC 2020 voie ECE)

On convient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer I_0 puis, à l'aide du changement de variable $y = x+1$, calculer I_1.

3. **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Indication : on écrira $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$ sous la forme d'une seule intégrale qu'on calculera.

b) En déduire I_2.

c) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ entrée par l'utilisateur :

```
from math import*
n=int(input('Donnez une valeur pour n : '))
a=1/2
b=log(2)-1/2
for k in range(n-1):
     aux=a
     a=.....
     b=.....
print(b)
```

4. **a)** Montrer que : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c) En déduire que : (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Etablir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

6. **a)** Calculer J_0 puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la valeur de J_1.

7. En utilisant les questions **5.** et **6.**, compléter le script Python suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
from math import*
n=int(input('Donnez une valeur pour n : '))
J=log(2)
for k in range(1,n):
     J=.....
I=.....
print(I)
```

8. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a : $J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

9. **a)** Utiliser les questions **4.** et **5.** pour déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |J_n|$ puis la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) Utiliser la question **5.** pour déterminer la limite de la suite (nJ_n).

10. Pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose $u_k = \ln 2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$. L'objectif de cette question est de montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ est convergente. Pour cela, on introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.

b) En déduire l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \dfrac{1}{2}(1-(-1)^n)$.

c) Exprimer u_n en fonction de J_n puis, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.

Problème n°3 : Etude de variables aléatoires discrètes infinies (EML 2018 voie ECE)

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note :

- P_i l'événement : « Obtenir Pile au i-ième lancer » ;
- F_i l'événement : « Obtenir Face au i-ième lancer ».

Partie I : Etude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce jusqu'à l'obtention du premier Pile.
On note Z la variable aléatoire égale au rang du premier Pile.

1. Reconnaître la loi de Z. Vous préciserez $Z(\Omega)$ et, pour tout $k \in Z(\Omega)$, $P(Z = k)$.

2. Donner l'espérance et la variance de Z.

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $P(Z \leq k) = 1 - (1 - p)^k$.

4. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire Z.

```
import numpy.random as rd
def variableZ():
    Z=.....
    while.....
        Z=.....
    Z=Z+1
    return Z
```

Partie II : Etude d'une seconde variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du **deuxième** Pile.

5. Ecrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ à l'aide des événements P_i et F_i, puis calculer leurs probabilités.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cette question, on suppose que $X = n$.

   a) Combien de fois a-t-on lancé la pièce ?

   b) Quel est le résultat du dernier lancer ?

   c) Combien de positions sont possibles pour le rang d'apparition du premier pile ?

   d) Ecrire l'événement $[X = n]$ à l'aide des événements P_i et F_i

7. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (n + 1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

8. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

Partie III : Etude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue.

9. Déterminer $U(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que : $\quad P(U = k) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

11. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆