Concours blanc n°2 : Mathématiques
Vendredi 13 Juin 2025, de 8h à 12h

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : INSEEC BS 2015 ECT Exercice n°1

On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

$$\boxed{\textit{On admet que } P^{-1}AP = D.}$$

2. **a)** Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

c) Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vous préciserez les quatre coefficients associés.

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A, B et C. A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$;
- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B, alors elle y reste avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans la pièce A ou dans la pièce C.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement A_n : « la mouche est dans la pièce A à l'instant n ».
On définit de même les événements B_n et C_n.

3. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) + P(C_n).$$

De même, donner sans justification l'expression de $P(A_{n+1})$ et de $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(B_{n+2}) = \frac{1}{2}P(B_{n+1}) + \frac{1}{2}P(B_n)$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{bmatrix} P(B_{n+1}) \\ P(B_n) \end{bmatrix}$.

5. **a)** Justifier que $U_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

b) Donner, sans justification, une expression de U_n en fonction de n, A et U_0.

c) Déduire de la question **2.d)** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(B_n) = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de $P(A_n)$ et de $P(C_n)$ en fonction de n.

Exercice n°2 : EML 2018 ECE Exercice n°2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Etude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2;4]$. On donne $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Etude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

On considère la fonction g définie par : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = \ln(x) + 2$.

4. Déterminer les points fixes de g.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b;+\infty[$.

6. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

7. **a)** Justifier que : $\forall x \in [b;+\infty[, \quad 0 < g'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

8. **a)** Ecire une fonction Python `suite(n)` qui, prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1   def valeur_approchee(epsilon):
2       n=0
3       while ..........
4           n = n + 1
5       b = suite(n)
6       return b
```

Partie III : Etude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

10. En déduire les variations de Φ sur $]0;+\infty[$.

11. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

12. **a)** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et $\Phi'(0) = 0$.

13. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on adlet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que les tangentes horizontales et asymptotes utiles.

Exercice n°3 : ECRICOME 2010 ECE Exercice n°3

On considère un jeu consistant à lancer successivement deux dés équilibrés à six faces. Les lancers sont supposés indépendants. On notera :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé ;
- E_1 est l'événement $(D_1 < D_2)$, E_2 est l'événement $(D_1 = D_2)$ et E_3 est l'événement $(D_1 > D_2)$.

Lors d'une partie :

- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point ;
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque deux points ;
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque un point.

Partie n°1 : Etude de parties successives

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Le joueur joue successivement n parties.
Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de point marqués lors de la i-ème partie ;
- Y_i la variable aléatoire représentant le nombre de point marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3. On pourra représenter l'ensemble des tirages possibles à l'aide d'un tableau.

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i, puis calculer son espérance et sa variance.

3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.

4. **a)** Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2,..., X_n. En déduire l'espérance de Y_n.

b) Combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir en moyenne strictement plus de 10 points ?

Partie n°2 : Etude d'un temps d'attente

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre donné de points.
Plus précisément, on note T_1 (resp. T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (resp. 2) pour la première fois, si cet événement se produit.

Par exemple, si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :

- 0 0 1 0 1 2 ... alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$;
- 0 0 0 2 1 2 ... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

5. **a)** Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par T_1 puis, pour tout $k \in T_1(\Omega)$ donner la valeur de $P(T_1 = k)$.

b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1.

6. **a)** Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par T_2.

b) Ecrire les événements $[T_2 = 1]$ et $[T_2 = 2]$ à l'aide de certains des événements $[X_1 = i]$ et $[X_2 = j]$ où $i, j \in [\![0, 2]\!]$. En déduire $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 3}$. A l'aide de certains des événements $[X_1 = i_1]$, $[X_2 = i_2]$, ..., $[X_k = i_k]$ où $i_1, i_2, \ldots, i_k \in [\![0, 2]\!]$, écrire les deux événements suivants :

- obtenir 0 points lors des $k-1$ premières parties puis obtenir 2 points à la k-ième ;
- obtenir exactement 1 point lors des $k-1$ premières parties puis obtenir au moins 1 point à la k-ième.

d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, on a :

$$P(T_2 = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}.$$

e) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?

f) Etablir que $\sum_{k \geq 1} P(T_2 = k)$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = 1$.

g) Que peut-on en déduire concernant l'événement : « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?

h) Justifier que T_2 possède une espérance et la calculer.

Exercice n°4 : Inspiré ECRICOME 2017 ECE Exercice n°1

Dans cet exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3.
On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Etude de la matrice A

1. Calculer $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

2. En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $A-I$ n'est pas inversible.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

3. Pour tout réel x, on note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$. Développer et réduire $(P(x))^2$.

4. Soit $C = A-I$. En utilisant les résultats de la question précédente et de la question 1, simplifier l'expression

$$(P(C))^2 = \left(I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2\right)^2.$$

En déduire une matrice M telle que $M^2 = A$, préciser ses 9 coefficients.

Partie C : Résolution complète de l'équation

Dans cette partie, on pose :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

$$\boxed{\textit{On admet que} \quad T = P^{-1}AP}$$

6. Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire que N est de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

où a, b et c sont trois réels.

b) En déduire que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions, qu'on notera N_1, N_2 et dont on explicitera les 9 coefficients.

7. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2 (on ne calculera pas explicitement les coefficients de ces deux matrices).

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆