Exercice n°1 :

1) On a $\det P = -3 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2) a) On a : $A = PDP^{-1}$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \quad [\text{par 2)a) et hypothèse de récurrence}] \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & (-1/2)^n \\ 1 & (-1/2)^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n \\ 2+(-1/2)^{n-1} & 1-(-1/2)^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{A_n, B_n, C_n\}$ donne :
$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) + P(C_n) \end{aligned}$$
car $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = 1$ car si la mouche est dans la pièce A ou C elle part dans la pièce B et $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ car si la mouche est dans la pièce B elle y reste avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

De même : $P(A_{n+1}) = \frac{1}{4}P(B_n)$ et $P(C_{n+1}) = \frac{1}{4}P(B_n)$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $P(B_{n+2}) = P(A_{n+1}) + \frac{1}{2}P(B_{n+1}) + P(C_{n+1}) = \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{2}P(B_{n+1}) + \frac{1}{4}P(B_n) = \frac{1}{2}P(B_{n+1}) + \frac{1}{2}P(B_n)$

5) a) À l'instant initial, la mouche est dans la pièce B d'où $P(B_0) = 1$

et, par 4), $P(B_1) = P(A_0) + \frac{1}{2} P(B_0) + P(C_0) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{2}$.

Donc $U_0 = \begin{bmatrix} P(B_1) \\ P(B_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

On a également : $A U_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(B_{n+1}) \\ P(B_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} P(B_{n+1}) + \frac{1}{2} P(B_n) \\ P(B_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(B_{n+2}) \\ P(B_{n+1}) \end{bmatrix}$

$= U_{n+1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $U_n = A^n U_0$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par 2) b), $U_n = A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + (-1/2)^n & 1 - (-1/2)^n \\ 2 + (-1/2)^{n-1} & 1 - (-1/2)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(B_{n+1}) \\ P(B_n) \end{bmatrix}$

d'où : $P(B_n) = \frac{1}{3} \left[\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \times \frac{1}{2} + \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \right]$

$= \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par 3), pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$: $P(C_n) = P(A_n) = \frac{1}{4} P(B_{n-1})$

$= \frac{1}{12} \left(2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$

En $n = 0$, on a :

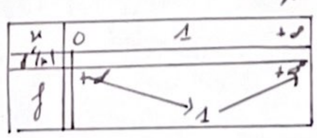
$\frac{1}{12} \left(2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) = \frac{1}{12} \left(2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{-1} \right) = 0 = P(C_0) = P(A_0)$.

Donc les deux relations sont vraies pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°2 :

Partie I

1) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de fonctions usuelles dérivables sur $]0; +\infty[$. De plus : $\forall x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x - 1$. D'où :



• $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

car $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

• $x - \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

2) La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ (car dérivable) strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Le théorème de la bijection continue nous assure que f réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)[=]1;+\infty[$ et réalise une seconde bijection de $]1;+\infty[$ sur $]f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]1;+\infty[$. Comme $2 \in]1;+\infty[$, il existe une unique valeur $a \in]0;1[$ telle que $f(a)=2$ et une unique valeur $b \in]1;+\infty[$ telle que $f(b)=2$. Enfin $f(1)=1 \neq 2$, a et b sont donc les seules solutions de $f(x)=2$ sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$\underline{0 < a < 1 < b}$$

3) On a : $f(2) = 2-\ln 2 \leqslant 2 = f(b)$

et $f(4) = 4 - \ln 2 \simeq 3,3 \geqslant 2 = f(b)$

Par stricte croissance de f sur $]1;+\infty[$, on a : $\underline{2 \leqslant b \leqslant 4.}$

Partie II

4) Soit $l>0$. On a : $l=g(l) \iff l = \ln(l)+2 \iff f(l)=2$.

Donc les points fixes de g sont a et b.

5) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: " u_n est bien défini et $u_n \geqslant b$ ".

- $P(0)$ vraie car $u_0 = 4 \geqslant b$ par 3)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On a : $g(u_n) = u_{n+1}$ bien défini car $u_n \geqslant b > 0$. D'autre part : $u_n \geqslant b$ implique que $\ln(u_n) \geqslant \ln(b)$ puis $g(u_n) \geqslant g(b)$ ie $u_{n+1} \geqslant b$ car b point fixe de g. Donc $P(n+1)$ vraie.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = \ln(u_n) - u_n + 2 = 2 - f(u_n)$.

Or $u_n \geqslant b$ et par croissance de f sur $]1;+\infty[$, $f(u_n) \geqslant f(b) = 2$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et $\underline{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

Comme (u_n) minorée par b, le théorème de la limite monotone nous assure que (u_n) converge vers $l \in [b,+\infty[$. Enfin, comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n)+2$, un passage à la limite donne $l = \ln(l)+2$ et l est un point fixe de g, d'où $\underline{l=b.}$

7) a) Soit $x > 0$. On a : $g'(x) = \frac{1}{x} > 0$

Pour $x \geqslant b$, on a alors $0 < g'(x) = \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{2}$ car $b \geqslant 2$ par 3)

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction g est dérivable sur $[b;+\infty[$ et : $\forall x \geqslant b$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$,

l'inégalité des accroissements finis nous assure que :

$$\forall x, y \in [b;+\infty[, \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$

Comme $u_n \geqslant b$, on a : $|g(u_n) - g(b)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - b|$ ie $|u_{n+1} - b| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - b|$

ou encore $0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$.

c) Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: " $0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ ".

- $P(0)$ vrai car $u_0 = 4$ et $b \in [2,4]$ donc :

$0 \leqslant u_0 - b \leqslant 2 = \frac{1}{2^{-1}}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On a : $0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$ [par 7)b)]

$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ [par hypothèse de récurrence]

$\leqslant \frac{1}{2^n}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

8) a)

```
import math as m
def suite(n):
    u = 4
    for k in range(n):
        u = m.log(u) + 2
    return u
```

b)

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n = 0
    while 1/2**(n-1) > epsilon:
        n = n+1
    b = suite(n)
    return b
```

Partie III

9) La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule pas $]0;+\infty[$ (car : $\forall x>0$, $f(x)\geq 1$ par 1)), ainsi $t \longmapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et possède une primitive F sur $]0;+\infty[$. On a :

$$\forall x>0,\quad \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt = \Big[F(t)\Big]_x^{2x} = F(2x) - F(x).$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto F(2x)$ l'est également par composition puis Φ aussi par somme. De plus :

$$\forall x>0,\quad \Phi'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$

$$= \frac{2f(x) - f(2x)}{f(2x)\,f(x)}$$

$$= \frac{2(x-\ln x) - (2x - \overbrace{\ln(2x)}^{\ln(x)+\ln(2)})}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))}$$

$$= \frac{\ln 2 - \ln x}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))}$$

10) On a : $\forall x>0$, $\Phi'(x) = \dfrac{\ln 2 - \ln x}{f(x)\,f(2x)}$.

Or : $\forall x>0$, $f(x) \geq 1 > 0$ donc le signe de $\Phi'(x)$ est le signe de $\ln 2 - \ln x$.

On en déduit

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

11) Soit $x \in]0;+\infty[$. On sait que : $\forall t \in [x;2x]$, $1 \leq f(t)$ ie $0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$.

Par croissance de l'intégrale on déduit que :

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt \leq \int_x^{2x} 1\,dt$$

ie $\quad 0 \leq \Phi(x) \leq 2x - x = x$

12) a) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, le théorème d'encadrement nous assure que : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$

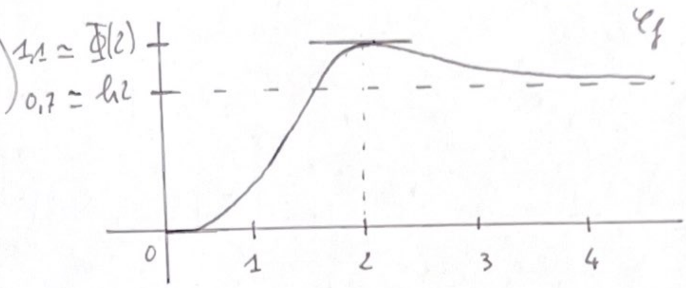
Donc Φ prolongeable par continuité en 0 et $\Phi(0) = 0$.

b) On a :

$$\Phi'(x) = \frac{\ln x \left(\frac{\ln 2}{\ln x} - 1 \right)}{(\ln x)^2 \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right) \left(\frac{2x}{\ln x} - \frac{\ln(2x)}{\ln x} \right)}$$

$$= \frac{\frac{\ln 2}{\ln x} - 1}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right) \left(\frac{2x}{\ln x} - \frac{\ln 2}{\ln x} + 1 \right)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^+$$

13)



Exercice n°3 :

Partie n° 1 :

1. On représente l'ensemble des issues du jeu à l'aide d'un tableau :

dé2 \ dé1	1	2	3	4	5	6
1	=	<	<	<	<	<
2	>	=	<	<	<	<
3	>	>	=	<	<	<
4	>	>	>	=	<	<
5	>	>	>	>	=	<
6	>	>	>	>	>	=

Les 36 issues sont équiprobables.

Il y a 6 issues avec égalité, $1+2+3+4+5 = 15$ issues où $D_1 < D_2$ et 15 issues où $D_1 > D_2$.

Donc : $\boxed{P(E_1) = P(E_3) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \qquad P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$

2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La VA X_i prend 3 valeurs : $0, 1, 2$.
Donc : $\underbrace{X_i(\Omega) = [\![0,2]\!]}$. De plus : $[X_i = 0] = E_1$, $[X_i = 1] = E_3$ et $[X_i = 2] = E_2$. D'où :

$$\boxed{P(X_i = 0) = P(E_1) = \frac{5}{12} \; ; \; P(X_i = 1) = P(E_3) = \frac{5}{12} \; ; \; P(X_i = 2) = P(E_2) = \frac{1}{6}.}$$

La VA X_i étant finie, elle possède une espérance et une variance :

$$\underbrace{E(X) = 0 \cdot \frac{5}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.}$$

D'après le Théorème de Transfert : $E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{5}{12} + 1^2 \cdot \frac{5}{12} + 2^2 \cdot \frac{1}{6}$

$$= \boxed{\frac{13}{12}}$$

En fin, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\underbrace{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{13}{12} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{48}}$$

3. La VA Y_1 est le nombre de points obtenus après la première partie, ainsi $\underbrace{Y_1 = X_1}$ et $\underbrace{Y_1 \text{ à la même loi que } X_1}$.

4.(a) La VA Y_n est le nombre de points <u>cumulés</u> après n parties.

Ainsi $\underbrace{Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$

L'espérance étant linéaire : $\underbrace{E(Y_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{3}{4}n}$

(b) On cherche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tel que : $E(Y_n) > 10$.

Or : $E(Y_n) > 10 \iff \frac{3}{4}n > 10 \iff n > \frac{40}{3}$.

Donc : $\underbrace{n = \left\lfloor \frac{40}{3} \right\rfloor + 1 = 14}$.

Partie n°2 :

1. (a) La VA T_1 donne le rang de la première partie où le joueur a un résultat différent de zéro.

Ainsi $\underbrace{T_1(\Omega) = \mathbb{N}^{\geq 1}}$

Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $[T_1 = k]$ est donc l'événement : obtenir un score de 0 sur les $(k-1)$ premières parties, puis un score de 1 ou 2 à la k-ième partie.

On a donc : $\underbrace{[T_1 = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0] \right) \cap [X_k \neq 0]}$

(b) On appelle "succès" le fait d'obtenir un score non nul sur une partie. La probabilité d'obtenir un score non-nul à la k-ième partie ($k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$) est : $P([X_k \neq 0]) = P([X_k = 1] \cup [X_k = 2])$

$= P([X_k = 1]) + P([X_k = 2])$
(car les événements $[X_k = 1]$, $[X_k = 2]$ sont incompatibles)

$= \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{12}$

La VA T_1 est le rang du premier succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $\frac{7}{12}$.
On déduit que : $\underbrace{T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{7}{12}\right)}$

2. (a) Etant donné que l'on peut marquer deux points dès la première partie, on a $\underbrace{T_2(\Omega) = \mathbb{N}^{\geq 1}}$.

(b) • $[T_2 = 1]$ signifie qu'on a obtenu deux points dès la 1ère partie.
Ainsi : $\underbrace{[T_2 = 1] = [X_1 = 2]}$ et $\underbrace{P([T_2 = 1]) = P([X_1 = 2]) = \frac{1}{6}}$

• $[T_2 = 2]$ signifie qu'on a au moins deux points une fois la seconde partie terminée. Soit le joueur a obtenu 1 point à la 1ère partie puis 1 ou 2 points à la seconde ; soit 0 point à la 1ère partie puis 2 points à la seconde.

$\underbrace{[T_2 = 2] = ([X_1 = 1] \cap [X_2 \neq 0]) \cup ([X_1 = 0] \cap [X_2 = 2])}$

et $P([T_2=2]) = P\left(\left([X_1=1]\cap[X_2\neq 0]\right)\cup\left([X_1=0]\cap[X_2=2]\right)\right)$ ④

$$= P\left([X_1=1]\cap[X_2\neq 0]\right) + P\left([X_1=0]\cap[X_2=2]\right)$$ (par incompatibilité)

$$= P(X_1=1)P(X_2\neq 0) + P(X_1=0)P(X_2=2)$$ (par indépendance des parties)

$$= \frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12} + \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{12}\left(\frac{7}{12}+\frac{2}{12}\right)$$

$$= \frac{5}{12}\,\frac{9}{12} = \boxed{\frac{5}{16}}$$

(c) Soit $k\in\mathbb{N}^{\geq 3}$. On note :

F : "Obtenir 0 point cumulé à l'issue de la $(k-1)$-ième partie puis obtenir 2 points à la k-ième". On a donc :

$$\underline{F = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1}[X_i=0]\right)\cap[X_k=2]}$$

G : "Obtenir 1 point cumulé à l'issue de $(k-1)$-ième partie puis obtenir au moins 1 point à la k-ième". On a donc :

$$G = \bigcup_{i=1}^{k-1}\left[\underbrace{\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1}[X_j=0]\cap[X_i=1]\cap[X_k\neq 0]}\right]$$

évènement : obtenir 0 aux $(k-1)$ 1ère parties sauf à la i-ème, puis obtenir 1 ou 2 à la k-ième.

(d) L'évènement $[T_2=k]$ est : atteindre pour la première fois 2 points à la k-ième partie. Donc $[T_2=k]$ est la réunion des deux évènements F et G incompatibles de la question précédente.

Pour $k \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, on a :

$$P([T_2 = k]) = P(T \cup G)$$

$$= P(T) + P(G)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(X_i = 0)\right) \times P(X_k = 2) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} P(X_j = 0)\right) P(X_i = 1) P(X_k \neq 0)$$

$$= \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12}$$

$$= \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{7}{12}$$

(e) • Pour $k = 1$: $\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{7}{12} = \frac{1}{6} = P([T_2 = 1])$.

• Pour $k = 2$: $\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12}$

$$= \frac{5}{16} = P([T_2 = 2])$$

La formule est valide dans ces deux cas.

(f) Pour $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $P(T_2 = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$

qui est la somme du terme général d'une série géométrique de raison $\frac{5}{12} \in]-1; 1[$, donc convergente, et du terme général d'une série géométrique dérivée de raison $\frac{5}{12} \in]-1; 1[$, donc convergente.

Ainsi $\sum_{k \geq 1} P(T_2 = k)$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$$

$$\overset{p=k-1}{=} \frac{1}{6} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{p} + \frac{7}{12} \frac{5}{12} \sum_{p=1}^{+\infty} p \left(\frac{5}{12}\right)^{p-1}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{12}} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{12}{7}\right)^2$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1$$

(g) L'événement : "le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2" est l'événement : $\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} [T_2 = k]}$.

Or : $P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} [T_2=k]}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [T_2 = k]\right)$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k)$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

Donc cet événement est quasi-impossible.

(h) On étudie la convergence absolue de la série $\sum_{k \geq 1} k\, P(T_2 = k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $|k\, P(T_2 = k)| = \frac{1}{6} k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} k(k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$

qui est la somme de termes généraux de séries géométrique dérivées de raison $\frac{5}{12} \in]-1, 1[$, donc convergente. Ainsi $\sum_{k \geq 1} k\, P(T_2 = k)$ converge absolument et T_2 possède une espérance donnée par :

$$E(T_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(T_2 = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^2} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^3}$$

Exercice n°4 :

Partie A :

1) $(A-I)^2 = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $(A-I)^3 = O_3$.

2) Supposons que $A-I$ est inversible. De $(A-I)^3 = O_3$ on déduirait que

$(A-I)^2 = (A-I)^{-1}(A-I)^3 = (A-I)^{-1}O_3 = O_3$, ce qui est manifestement

faux par 1), il y a donc contradiction et $A-I$ n'est pas inversible.

Partie B :

3) $$(P(x))^2 = \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 + x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3$$

$$= 1 + x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4.$$

4) $$(P(C))^2 = \left(I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2\right)^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4.$$

Or $C^3 = C^4 = O_3$ donc : $(P(C))^2 = I + C = I + (A-I) = A$.

La matrice $P(C)$ est solution de $M^2 = A$.

De plus :

$$P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Partie C :

5) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\overset{L}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Donc P inversible (3 pivots non nuls)

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\overset{L}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2}}{\overset{L}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{6} L_1}{\overset{L}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/18 & -2/9 & -1/18 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Donc $P^{-1} = \dfrac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 6 & -6 & -6 \\ 18 & -18 & 0 \end{bmatrix}$

---

6) a) Supposons que $N^2 = T$. Ora:

$$\underline{NT = NN^2 = N^2 N = TN.}$$

Soit $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ora:

$$NT = TN \iff \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = a+d \\ d = d+g \\ a+b = b+e \\ d+e = e+h \\ g+h = h \\ b+c = c+f \\ e+f = f+i \\ h+i = i \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ g = 0 \\ a = e \\ d = h \\ b = f \\ e = i \\ h = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases}$$

$$\iff \underline{N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}}$$

b) Ainsi :

$$N^2 = T \iff \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 = 1 \ (\iff a = 1 \text{ ou } a = -1) \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{cases}$$

Cas n°1 : $a = 1$, on a : $N^2 = T \iff \begin{cases} 2b = 1 \\ 2c + b^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases}$

Donc $N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

cas n°2 : $a = -1$, on a : $N^2 = T \iff \begin{cases} -2b = 1 \\ -2c + b^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1/2 \\ c = 1/8 \end{cases}$

Donc $N_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -N_1$

7) On a :

$$M^2 = A \iff M^2 = PTP^{-1} \iff P^{-1}M^2P = T$$

$$\iff (P^{-1}MP)^2 = T$$

$$\iff P^{-1}MP = N_1 \text{ ou } P^{-1}MP = N_2$$

$$\iff M = PN_1P^{-1} \text{ ou } M = PN_2P^{-1}$$

Il y a donc deux solutions données par :
PN_1P^{-1} et PN_2P^{-1}.