Calculs algébriques - Rudiments de logique

I Mise en route : Calcul algébrique, équations, inéquations

1 Rappels sur les règles de calcul algébrique

- **Fractions :** Soient a, b, c, d des réels tels que $b \neq 0$, $d \neq 0$ ($a \neq 0$ ou $c \neq 0$ si nécessaire).

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a\,\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{(Dénominateur optimal : ppcm}(b,d))$$

$$\frac{d}{\frac{a}{b}} = \frac{bd}{a} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{d} = \frac{a}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

- **Identités remarquables :** Soient a, b et c des réels.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a-ib)(a+ib)$$

- **Puissances :** Soient a et b des réels positifs ($b \neq 0$ si nécessaire) et m, n des entiers.

$$a^{m+n} = a^m a^n \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (a \times b)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- **Racines carrées :** Soient a et b des réels positifs ($b \neq 0$ ou $a \neq 0$ si nécessaire)

$$\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \frac{\sqrt{b}}{b} = \frac{1}{\sqrt{b}} \qquad \frac{b}{\sqrt{b}} = \sqrt{b}$$

Quantité conjuguée : $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+b}$ $\qquad$ $\displaystyle \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$ $\qquad$ Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $(\sqrt{x})^2 = x$

2 Premières mises au point sur les équations et les inéquations

- **Intégrité de $\mathbb{R}$**

Un produit de deux réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Autrement dit, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$a \times b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \ \text{ OU } \ b = 0$$

- **Résolution d'équations**

Une méthode pour résoudre une équation réelle :

Se ramener à $A = 0$, **FACTORISER** l'expression A et utiliser la propriété d'intégrité.

- **Règle des signes**

Si on connaît le signe des réels a et b, la règle des signes nous donne le signe de $a \times b$ et $\dfrac{a}{b}$.

A priori, on ne connaît le signe de $a + b$ que dans le cas où a et b sont de <u>même signe</u>.

- **Résolution d'inéquations**

Une méthode pour résoudre une inéquation réelle :

Se ramener à $A \geq 0$, **FACTORISER** l'expression A et utiliser la règle des signes.

- **Signe d'un trinôme du second degré**

II Rudiments de logique

1 Proposition, négation d'une proposition

Définition 1 : Une **proposition** P est un énoncé qui est soit vrai, soit faux (mais pas les deux).

Définition 2 : **(Négation)** La négation de P est la proposition décrivant *l'événement contraire* de P, on la note non(P). Elle est vraie quand P est fausse (et vice versa).

Dans la suite, P et Q désignent des propositions et E désigne un ensemble.

2 Les quantificateurs

- Le symbole $\forall$ se traduit en français par "Pour tout", ou encore "Quel que soit".
- Le symbole $\exists$ se traduit en français par "Il existe".

Dans une propriété logique, l'ordre des quantificateurs est déterminant.

- **Négation d'une propriété universelle :** non $[\forall x \in E, P(x)]$ équivaut à ....
- **Négation d'une propriété existentielle :** non $[\exists x \in E, P(x)]$ équivaut à ....

3 Construction de propositions

Définition 3 : **(ET / OU)**
- La proposition P ET Q est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément.
- La proposition P OU Q est vraie lorsque au moins une des deux propriétés P, Q est vraie.

P	Q	P ET Q	P OU Q
Vrai	Vrai		
Vrai	Faux		
Faux	Vrai		
Faux	Faux		

- **Négation d'une conjonction** : non(P ET Q) équivaut à ....
- **Négation d'une disjonction** : non(P OU Q) équivaut à ....

Définition 4 : **(Implication, réciproque)**
- On note $P \Longrightarrow Q$ la proposition qui est :
  - vraie si Q est vraie à chaque fois que P l'est,
  - vraie si P est fausse,
  - fausse sinon.
- On dit que P est **une condition suffisante** (CS) à Q
(il est suffisant que P soit vraie pour que Q le soit).
- On dit que Q est **une condition nécessaire** (CN) à P
(il est nécessaire que Q soit vraie pour que P le soit).
- L'implication $Q \Longrightarrow P$ est appelé **réciproque** de l'implication $P \Longrightarrow Q$.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
Vrai	Vrai	
Vrai	Faux	
Faux	Vrai	
Faux	Faux	

- **Négation d'une implication** : non($P \Longrightarrow Q$) équivaut à ....
- **Contraposée d'une implication** : $P \Longrightarrow Q$ équivaut à ....

DÉFINITION 5 : **(Equivalence)** On note $P \Longleftrightarrow Q$ la proposition qui est vraie lorsque $[P \Longrightarrow Q \text{ ET } Q \Longrightarrow P]$ est vraie.
Les propositions P et Q sont alors simultanément vraies ou simultanément fausses.
On dit que Q est **une condition nécessaire et suffisante** (CNS) à P (et vice versa).

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
Vrai	Vrai			
Vrai	Faux			
Faux	Vrai			
Faux	Faux			