$\boxed{\text{Méthodes en analyse}}$

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

Notations Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, on appelle intervalle tout ensemble de l'une des formes suivantes :
Segment : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
Intervalles ouverts : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
Intervalles semi-ouverts à droite : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
Intervalles semi-ouverts à gauche : $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

1 Manipuler des inégalités

Proposition 1 : (**Opérations sur les inégalités**)

Opérations sur <u>une</u> inégalité

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a

(i) $a \leq b \iff a + c \leq b + c$

(ii) Si $c > 0$ alors $\quad a \leq b \iff ac \leq bc$

(iii) Si $c < 0$ alors $\quad a \leq b \iff ac \geq bc$

Opérations sur les inégalités <u>entre elles</u>

Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a

(i) Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

(ii) Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$

N'ajouter (membre à membre) que des inégalités **de même sens**.

Ne multiplier (membre à membre) que des inégalités dont les membres sont **positifs**.

Ne jamais soustraire ou diviser des inégalités entre elles.

Proposition 2 : **(Passage à l'inverse, au carré dans une inégalité)**

(i) Pour tout réels a et b **non nuls de même signe**, $\quad a \leq b \iff \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$

(ii) Pour tout réels a et b **positifs**, $\quad a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

(iii) Pour tout réels a et b **négatifs**, $\quad a \leq b \iff b^2 \leq a^2$

Exemple n°1 : Pour tout $x \in [0, 2]$, établir un encadrement de l'expression $\dfrac{x+1}{x^2+3}$.

Exemple n°2 : Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{-x}{x+1} = x$, puis l'inéquation $\dfrac{-x}{x+1} \leq x$.

2 Valeur absolue

Définition 1 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit sa valeur absolue par $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$

Interprétation géométrique :
Soient $x, a \in \mathbb{R}$, $|x|$ est la distance de x à 0 et $|x - a|$ est la distance de x à a.

Proposition 3 : Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) $|x| \geq 0$ (ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (iii) $\sqrt{x^2} = |x|$ (iv) $|xy| = |x||y|$ (v) $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

(vi) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, $|x - a| \leq r \iff x \in [a - r, a + r]$ *Cas particulier :* $\boxed{|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r}$.

(vii) *Inégalités triangulaires :* $\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$ $\boxed{\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x \pm y|}$

Exemple n°3 : Résoudre *géométriquement* l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $|2 - x| \leq 5$

Exemple n°4 : Résoudre *algébriquement* l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $|2 - x| + |2x + 4| \leq 5$

3 Raisonner par récurrence pour établir des inégalités

Principe de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathscr{P}(n)$.
Si : • $\mathscr{P}(0)$ est vraie (*initialisation*), • $\mathscr{P}$ est *héréditaire* i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)]$,
alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Il est possible de procéder à l'initialisation à partir d'un entier $n_0 > 0$.
Dans ce cas la conclusion sera que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie à partir du rang n_0 i.e. pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple n°5 : Etudier la proposition $2n + 1 \leq 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

II Etude de fonctions

1 Vocabulaire sur les fonctions

- Une fonction f est définie :

- par un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ appelé **ensemble de définition** (en général, un intervalle ou une réunion d'intervalles);
- un **procédé** de calcul qui, à tout $x \in D$, associe un unique élément y de $\mathbb{R}$, noté $f(x)$;

On résume cela par le **schéma fonctionnel :** $\boxed{\begin{array}{llll} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}}$, on peut également noter $\boxed{f \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})}$.

- L'élément $y = f(x)$ est **l'image** de x par la fonction f, x est **un antécédent** de y par f.
- L'ensemble de toutes les images est appelé **l'ensemble image** de f, il est noté $\boxed{f(D) = \ldots\ldots\ldots}$.
- Sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est définie par :

$$\boxed{\mathcal{C}_f = \{M(x, y) \mid y = f(x)\}}.$$

Exemple n°6 : Fonctions $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

Dans la suite, D et E désignent des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

2 Composée de deux fonctions

Définition 2 : Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in D$, $f(x) \in E$.

On peut alors définir la composée de f par g, notée $g \circ f$: $\boxed{\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{f} & \boxed{E} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}}$

Exemple n°7 : Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto \ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$.
Exemple n°8 : Si f est a fonction $x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 1$. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

En général $f \circ g \neq g \circ f$!

3 Représentation graphique et réduction du domaine d'étude

- **Translations, symétries, dilatations de courbes**

Proposition 4 : Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^\star$.

Expression de g	Transformation géométrique de $\mathscr{C}_f$ à $\mathscr{C}_g$
$x \mapsto f(x) + a$	Translation de vecteur ....
$x \mapsto f(x + a)$	....
$x \mapsto f(a - x)$	Symétrie orthogonale ....
$x \mapsto f(ax)$	Dilatation de rapport ... suivant le vecteur ....
$x \mapsto af(x)$	....

Exemple n°9 : Représenter la fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$.

- **Parité, imparité, périodicité**

DÉFINITION 3 : • Une fonction est dite **paire** (respectivement **impaire**) lorsque :
- son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0 (pour tout $x \in D$, $-x \in D$),
- et si pour tout $x \in D$, $\quad f(-x) = f(x) \quad$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$).

• Une fonction est dite T**-périodique** pour $T > 0$, lorsque :
- pour tout $x \in D$, $\quad x + T \in D \quad$ et $\quad x - T \in D$,
- et si pour tout $x \in D$, $\quad f(x + T) = f(x)$.

REMARQUE : Si T est une période de f alors $2T$, $3T$, ..., nT sont aussi des périodes de f.

4 Fonctions et inégalités

4.1 Monotonie

DÉFINITION 4 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est
- **croissante** lorsque : pour tous $x, y \in D$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.

Trad. : $\boxed{f \text{ croissante } \overset{\text{déf.}}{\iff} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

- **décroissante** lorsque : pour tous $x, y \in D$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.
- **strictement croissante** lorsque : pour tous $x, y \in D$ tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.
- **strictement décroissante** lorsque : pour tous $x, y \in D$ tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

Trad. : $\boxed{f \text{ strictement décroissante } \overset{\text{déf.}}{\iff} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

- **(strictement) monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

PROPOSITION 5 : **(Règles de variations)**
(i) La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
(ii) Si f et g sont deux fonctions de même variation sur leur ensemble respectif alors $g \circ f$ est croissante.
(iii) Si f et g sont deux fonctions de variation contraire sur leur ensemble respectif alors $g \circ f$ est décroissante.

Exemple n°10 : Déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Exemple n°11 : Déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 - x^2\right)$ définie sur $]-1, 1[$.

4.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

DÉFINITION 5 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ est
- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$. Un tel M est appelé un **majorant** de f.

Trad. : $\boxed{f \text{ majorée } \overset{\text{déf.}}{\iff} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x)$. Un tel m est appelé un **minorant** de f.
- **bornée** si elle est majorée et minorée.

PROPOSITION 6 : **(Caractérisation des fonctions bornées)**
Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Le fonction f est bornée si et seulement si, il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $x \in D, |f(x)| \leq K$.

Trad. : $\boxed{f \text{ bornée } \iff \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

4.3 Maximum, minimum, extremum

DÉFINITION 5 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
- On dit que f admet un **maximum** en a si, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq f(a)$. On note alors $f(a) = \max\limits_{x \in D} f(x)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si, pour tout $x \in D$, $f(a) \leq f(x)$. On note alors $f(a) = \min\limits_{x \in D} f(x)$.
- On dit que f admet un **extremum** en a si elle admet en ce point un maximum ou un minimum.

REMARQUE : Un maximum (resp. un minimum) est un majorant (resp. un minorant) **atteint**.

4.4 Etablir des encadrements et inégalités à l'aide de fonctions

Exemple n°12 : Etablir le meilleur encadrement possible de $\dfrac{x+1}{x^2+3}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
En déduire un encadrement similaire pour $x \in [0,2]$. Comparer avec celui obtenu « à la main ».

Exemple n°13 : Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln x \leq x-1$. Interpréter graphiquement cette inégalité.

5 Rappels et compléments sur la dérivation

Les ensembles I et J désigneront des **intervalles** de $\mathbb{R}$.

Définition 6 : Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$.
La fonction f est dite **dérivable** en x si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et si elle est finie. On note $f'(x)$ cette limite.
Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. On note alors f' la fonction $x \mapsto f'(x)$.

Proposition 7 : Si f est dérivable en a, alors le graphe de f admet une tangente au point $(a, f(a))$, d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Exemple n°14 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Proposition 8 : **(Opérations sur les fonctions dérivables)**
Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable, fg est dérivable et (si g ne s'annule pas) $\dfrac{f}{g}$ est dérivable. De plus,

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Proposition 9 : **(Dérivation d'une composée)**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.
Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'}$.

Cas particuliers à connaître : (Sous réserve d'existence des composées)

$(f^n)' = nf^{n-1} \times f'$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$; $\quad \left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$; $\quad (\exp f)' = \exp f \times f'$;
$(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$; $\quad (\sin f)' = \cos f \times f'$; $\quad (\cos f)' = -\sin f \times f'$.

Exemple n°15 : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$, puis déterminer l'ensemble de dérivabilité. Enfin déterminer la fonction dérivée associée.

Théorème 1 : **(Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones)**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On rappelle que I est un **intervalle**.
(i) f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
(ii) f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
(iii) Si f' est positive sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.

Exemple n°16 : La fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$.

5.1 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 7 : On définit par récurrence la notion de fonction n fois dérivable et de **dérivée n-ième**, notée $f^{(n)}$ en disant que :

- Toute fonction f est 0 fois dérivable, et $f^{(0)} = f$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est $(n+1)$ fois dérivable lorsque
  - ⋆ f est n fois dérivable,
  - ⋆ $f^{(n)}$ est dérivable. On pose alors $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Exemple n°17 : Déterminer la dérivée seconde de $f : x \mapsto e^{2x} \cos x$.

5.2 Calculs de dérivées partielles

En sciences appliquées (maths, physique, chimie, SI etc), il arrivera souvent de rencontrer des fonctions de plusieurs variables. Typiquement une quantité physique $f(t,x)$ qui dépendrait, à la fois d'une variable t (modélisant par exemple le temps) et d'une variable x (modélisant par exemple une position dans l'espace). On peut alors considérer, si elles existent, les **dérivées partielles** :

$\dfrac{\partial f}{\partial t}$: dérivée de f par rapport à t, à x fixé. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: dérivée de f par rapport à x, à t fixé.

Exemple n°18 : Soit $f : (t,x) \mapsto \cos(tx) + e^t \ln x$. Calculer les dérivées partielles de f par rapport à t et x.

6 Plan général d'étude d'une fonction

1. On détermine :
   - son ensemble de définition D (s'il n'est pas donné),
   - son ensemble de dérivabilité K.

   On a toujours $K \subset D$, et souvent, ces ensembles sont égaux à un nombre fini de points près.
2. On restreint l'intervalle d'étude en testant la parité, la périodicité, en déterminant d'éventuelles symétries.
3. Etude des variations de f :

   SOIT en déterminant, pour tout $x \in K$, $f'(x)$ et en étudiant son signe,

   SOIT en écrivant f comme une composée, lorsque c'est possible.
4. On dresse le tableau de variation de f.
5. On précise les valeurs particulières de f et ses limites aux bornes de D.
6. On trace l'allure du graphe de la fonction.

Remarque :

- Les annulations de la dérivée donneront des tangentes horizontales.
- Les points où la fonction est définie mais où la dérivée tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ donneront des tangentes verticales.
- Les limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ donneront des asymptotes horizontales.
- Les limites infinies en un point donneront des asymptotes verticales.

III Premières fonctions usuelles

1 Fonctions exponentielle et logarithme népérien

1.1 Définitions et propriétés : voir fiche associée

1.2 Croissances comparées

Rappel : $\boxed{\text{Les formes indéterminées usuelles sont : } \quad \infty \times 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad +\infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0.}$

Proposition 10 : **(Croissances comparées (version 1))**

- ln est **négligeable** en $+\infty$ devant les fonctions puissances : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0.$
- exp est **prépondérante** en $\pm\infty$ devant les fonctions puissances : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$

2 Fonctions trigonométriques

Notation : Soient $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$.

On dit que x est congru à y modulo α lorsque : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$.
Autrement dit : x et y sont égaux à un multiple entier de α près.

On note alors : $x \equiv y\,[\alpha]$.

Exemple n°19 : *(Modulo 2π)* • $-\frac{\pi}{2} \equiv \qquad [2\pi]$ • $8\pi \equiv \qquad [2\pi]$ • $15\pi \equiv \qquad [2\pi]$ • $\frac{11\pi}{3} \equiv \qquad [2\pi]$

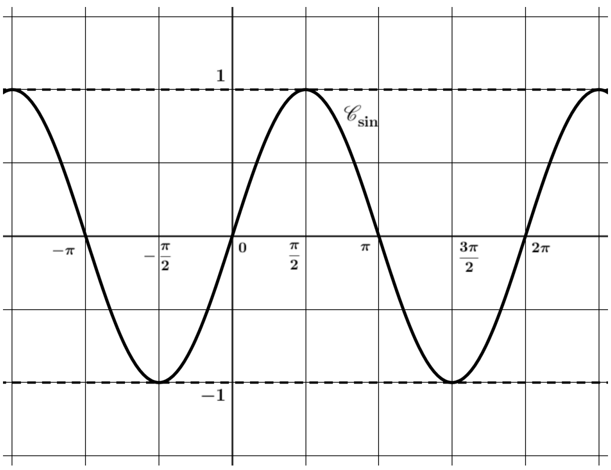
2.1 Fonctions cosinus et sinus

Proposition 11 : **(Propriétés des fonctions sinus et cosinus)**

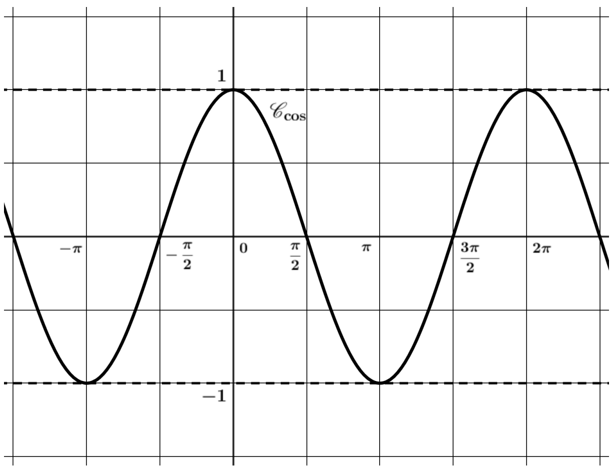
(i) Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction cosinus est paire, la fonctions sinus est impaire.

(iii) Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.



Graphe de la fonction sin



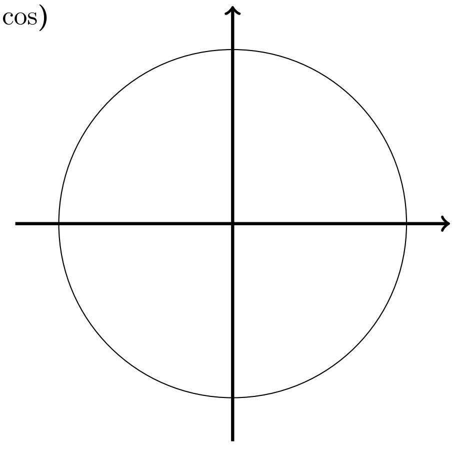
Graphe de la fonction cos

Proposition 12 : **(Paramétrisation du cercle unité par** sin **et** cos**)**

(i) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

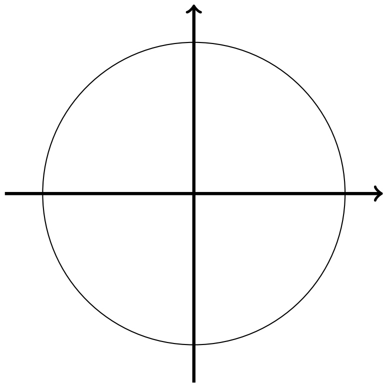
(ii) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$



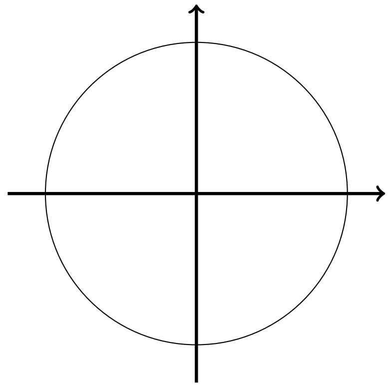
Proposition 13 : **(Égalité des sinus)**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin x = \sin y \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ x \equiv \pi - y\,[2\pi] \end{cases}$$



Proposition 14 : **(Égalité des cosinus)**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos x = \cos y \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ x \equiv -y\,[2\pi] \end{cases}$$



Exemple n°20 : Résoudre *géométriquement* puis *algébriquement*
les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 0$ et $\sin x = 1$.

Exemple n°21 : Résoudre *algébriquement* l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sin x$.

Proposition 15 : **(Transformation de $a\cos x + b\sin x$ en $A\cos(x-\varphi)$)**
Soient $a, b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)$. On peut trouver deux réels $A > 0$ et φ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\varphi)$$

Exemple n°22 : 1) Trouver $A > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{6}\sin x = A\cos(x-\varphi)$.
2) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{6}\sin x = \sqrt{2}$.

2.2 Fonctions tangente

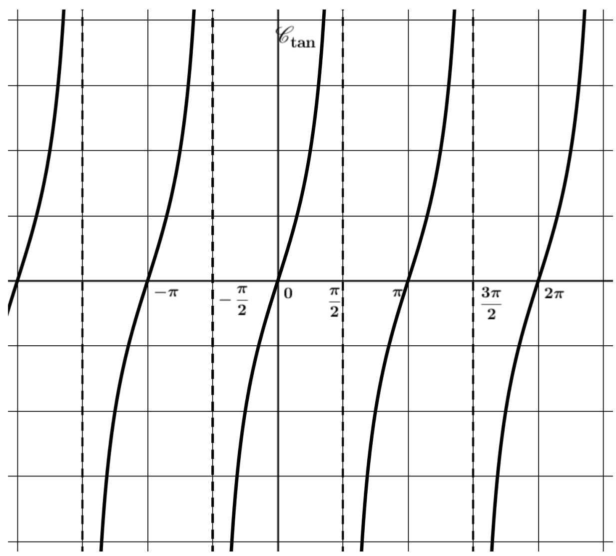
Définition 8 : **(Fonction tangente)**
La fonction tangente, noté tan, est définie sur $D_{\tan} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

Proposition 16 : **(Propriétés** tan**)**
(i) La fonction tan est π-périodique sur $D_{\tan}$.
(ii) La fonction tangente est impaire.
(iii) La fonction tan est dérivable sur $D_{\tan}$ et

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

(iv) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.

Exemple n°23 : Vérifier le point (iii).



Graphe de la fonction tan