IX Nombres complexes et géométrie plane

1 Rappels

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan $\mathscr{P}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$. On a :
$$|z_{\vec{u}}| = \|\vec{u}\| \qquad \text{et,} \quad \text{si } z_{\vec{u}} \neq 0, \qquad \arg(z_{\vec{u}}) \equiv (\vec{i},\vec{u})\,[2\pi].$$
2. Soient A et B deux points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives z_A et z_B alors $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe $z_B - z_A$. On a :
$$|z_B - z_A| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB \qquad \text{et,} \quad \text{si } z_A \neq z_B, \qquad \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i},\overrightarrow{AB})\,[2\pi].$$

Proposition : Soient A, B et C des points du plan tels que $A \neq B$ et $A \neq C$, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

- Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est : $\quad \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\,[2\pi].$

2 Caractériser des situations : d'orthogonalité et d'alignement

Proposition : Soient A, B et C des points du plan tels que $A \neq B$ et $A \neq C$, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

- (AB) et (AC) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$ ssi $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.
- A, B et C sont alignés ssi $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\,[\pi]$ ssi $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

3 Expressions complexes de quelques transformations du plan

Dans la suite, on confond un point (un vecteur) du plan et son affixe (on confond donc $\mathscr{P}$ et $\mathbb{C}$).

Définition :

- On appelle **rotation de centre O et d'angle** θ l'application r_θ du plan dans le plan définie par
$$r_\theta : z \mapsto e^{i\theta}z.$$
- On appelle **translation de vecteur** a l'application t_a du plan dans le plan définie par
$$t_a : z \mapsto z + a.$$
- On appelle **homothétie de rapport** k (avec $k \in \mathbb{R}^\star$) l'application h_k du plan dans le plan définie par
$$h_k : z \mapsto kz.$$
- On appelle **symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses** l'application du plan dans le plan définie par
$$s : z \mapsto \bar{z}.$$

Remarque : r_θ, t_a, h_k et s sont des bijections de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, ces applications sont des **transformations du plan**.

X Fonctions à valeurs complexes

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on note $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

Définition : On définit les fonction $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ par : pour tout $x \in I$, $\mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$.

Définition : On dit que f est continue (resp. dérivable) sur I si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
Dans le cas de la dérivabilité, on définit alors : $f' = (\mathrm{Re}(f))' + i(\mathrm{Im}(f))'$.

Proposition : Soient f et $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable, fg est dérivable et (si g ne s'annule pas) $\dfrac{f}{g}$ est dérivable avec
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proposition : Soient $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable.
Alors, la fonction $f : x \in I \mapsto e^{\varphi(x)} \in \mathbb{C}$ est dérivable sur I et on a :
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = e^{\varphi(x)}\varphi'(x).$$