# Correction de quelques exercices du TD5

---

**Correction de l'exercice n°1** $f_1$ **à** $f_6$

**Enoncé :** Pour chacune des fonctions suivantes, étudier l'existence puis déterminer une primitive :

$$f_1 : x \mapsto \ln(2)\left(\frac{x^3}{2} - 4x + e^{-x/2}\right) \quad f_2 : x \mapsto 2^x \quad f_3 : x \mapsto \frac{2}{x^2} \quad f_4 : x \mapsto \sqrt{x} \quad f_5 : x \mapsto \frac{1}{1-2x} \quad f_6 : x \mapsto \frac{1}{(1-2x)^3}$$

- La fonction $f_1$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (car somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$). Ainsi, sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\int \ln(2)\left(\frac{x^3}{2} - 4x + e^{-x/2}\right) \mathrm{d}x &= \ln(2)\left(\int \frac{x^3}{2}\mathrm{d}x - \int 4x\mathrm{d}x + \int e^{-x/2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \ln(2)\left(\frac{1}{2}\int x^3\,\mathrm{d}x - 4\int x\,\mathrm{d}x - 2\int \overbrace{-\frac{1}{2}e^{-x/2}}^{=u'(x)e^{u(x)}}\,\mathrm{d}x\right) + C \\
&= \ln(2)\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right] - 4\left[\frac{x^2}{2}\right] - 2\left[e^{-x/2}\right]\right) + C \\
&= \ln(2)\left(\frac{x^4}{8} - 2x^2 - 2e^{-x/2}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

- La fonction $f_2$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^\star$. Ainsi, sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+^\star$, on a

$$\begin{aligned}
\int 2^x\,\mathrm{d}x &= \int e^{x\ln(2)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\int \overbrace{\ln(2)e^{x\ln(2)}}^{=u'(x)e^{u(x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\ln(2)}e^{x\ln(2)} + C \\
&= \frac{2^x}{\ln(2)} + C \quad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

- La fonction $f_3$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$. Ainsi, sur tout intervalle ne contenant pas $0$, on a

$$\int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{-1}{x}\right] + C = \frac{-2}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

- La fonction $f_4$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Ainsi, sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$, on a

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

- La fonction $f_5$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Ainsi, sur tout intervalle de $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-2x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \overbrace{\frac{-2}{1-2x}}^{=\frac{u'(x)}{u(x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(|1-2x|\right) + C \quad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

- La fonction $f_6$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Ainsi, sur tout intervalle de $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-2x)^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \overbrace{\frac{-2}{(1-2x)^3}}^{=\frac{u'(x)}{u^3(x)}}\,\mathrm{d}x \quad \left[\text{Rappel : } \quad \frac{u'}{u^n} \overset{\text{primitive}}{\longrightarrow} \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}\right]\\ &= -\frac{1}{2}\frac{-1}{2(1-2x)^2}+C\\ &= \frac{1}{4(1-2x)^2}+C \quad (C\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

**Correction de l'exercice n°5, question 5. et 6.**

⋆ Question 5. : Résoudre $(E) : -y'+2y=(t-1)e^{-t}$.

— L'équation homogène associée $-y'+2y=0$, qui équivaut à $y'-2y=0$, a pour solution générale :

$$t\mapsto \lambda e^{-\int -2\,\mathrm{d}t}=\lambda e^{2t} \quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

— Le second membre est du type $(at+b)e^{kt}$ avec $k=-1\neq 2$. On cherche une solution particulière sous la même forme $f_P : t\mapsto (at+b)e^{-t}$ où $a,b\in\mathbb{R}$ sont à déterminer.
On a $f_P(t)=(at+b)e^{-t}$ et $f_P'(t)=(-at+a-b)e^{-t}$.

$$\begin{aligned} f_P \text{ est solution particulière de } (E) &\iff \forall t\in\mathbb{R}, \quad -f_P'(t)+2f_P(t)=(t-1)e^{-t}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}, \quad -(-at+a-b)e^{-t}+2(at+b)e^{-t}=(t-1)e^{-t}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}, \quad (3at-a+3b)e^{-t}=(t-1)e^{-t}\end{aligned}$$

Il suffit donc que $3a=1$ et $-a+3b=-1$. On choisit $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{9}$ et $f_P : t\mapsto\left(\frac{1}{3}t-\frac{2}{9}\right)e^{-t}$ est solution particulière de $(E)$.

— La solution générale de l'équation $(E)$ est :

$$t\mapsto\left(\frac{1}{3}t-\frac{2}{9}\right)e^{-t}+\lambda e^{2t}.$$

⋆ Question 6. : Résoudre $(E) : y'+y=e^{-t}+e^{-2t}$.

— L'équation homogène associée $y'+y=0$ a pour solution générale :

$$t\mapsto \lambda e^{-\int 1\,\mathrm{d}t}=\lambda e^{-t} \quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

— On cherche, d'une part, une solution particulière $f_1$ à l'équation $(E_1) : y'+y=e^{-t}$ et, d'autre part, une solution particulière $f_2$ à l'équation $(E_2) : y'+y=e^{-2t}$. Le principe de superposition nous assure que $f_1+f_2$ est une solution particulière de $(E)$.

  — Pour $(E_1)$. Le second membre est du type $ae^{kt}$ avec $k=-1$. On cherche une solution particulière sous la forme $f_1 : t\mapsto (at+b)e^{-t}$ où $a,b\in\mathbb{R}$ sont à déterminer.
  On a $f_1(t)=(at+b)e^{-t}$ et $f_1'(t)=(-at+a-b)e^{-t}$.

$$\begin{aligned} f_1 \text{ est solution particulière de } (E) &\iff \forall t\in\mathbb{R}, \quad f_1'(t)+f_1(t)=e^{-t}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}, \quad (-at+a-b)e^{-t}+(at+b)e^{-t}=e^{-t}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}, \quad ae^{-t}=(t-1)e^{-t}\end{aligned}$$

  Il suffit donc que $a=1$ et $f_1 : t\mapsto te^{-t}$ est solution particulière de $(E_1)$.

— Pour $(E_2)$. Le second membre est du type $ae^{kt}$ avec $k = -2 \neq -1$. On cherche une solution particulière sous la même forme $f_2 : t \mapsto ae^{-2t}$ où $a \in \mathbb{R}$ està déterminer.
On a $f_2(t) = ae^{-2t}$ et $f_2'(t) = -2ae^{-t}$.

$$\begin{aligned} f_2 \text{ est solution particulière de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_2'(t) + f_2(t) = e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad ae^{-2t} + (-2a)e^{-2t} = e^{-2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad -ae^{-2t} = e^{-2t} \end{aligned}$$

Il suffit donc que $a = -1$ et $f_2 : t \mapsto -e^{-2t}$ est solution particulière de $(E_2)$.

— Donc une solution particulière de $(E)$ est $t \mapsto te^{-t} - e^{-2t}$.

— La solution générale de l'équation $(E)$ est :

$$t \mapsto te^{-t} - e^{-2t} + \lambda e^{-t}.$$

**Correction de l'exercice n°6, question 3. et 4.**

⋆ Question 3. : Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre $(E) : ty' + 2y = t^n$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

— L'équation homogène $(E_H)$ associée $ty' + 2y = 0$ qui équivaut à $y' + \frac{2}{t}y = 0$ (car $t > 0$), a pour solution générale :

$$t \mapsto \lambda e^{-\int \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{t^2} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{car} \qquad -\int \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = -2\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

— On cherche une solution particulière sous la forme $f_P : t \mapsto \frac{z(t)}{t^2}$ avec $z$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ à déterminer.
On a : $f_P(t) = \frac{z(t)}{t^2}$ et $f_P'(t) = \frac{z'(t)t - 2z(t)}{t^3}$.

$$\begin{aligned} f_P \text{ est solution particulière de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad tf_P'(t) + 2f_P(t) = t^n \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad t\frac{z'(t)t - 2z(t)}{t^3} + 2\frac{z(t)}{t^2} = t^n \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{z'(t)t - 2z(t)}{t^2} + \frac{2z(t)}{t^2} = t^n \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = t^{n+1} \end{aligned}$$

La choix $z(t) = \frac{t^{n+2}}{n+2}$ convient et $f_P : t \mapsto \frac{t^n}{n+2}$ est solution particulière de $(E)$.

— La solution générale de l'équation $(E)$ est :

$$t \mapsto \frac{t^n}{n+2} + \frac{\lambda}{t^2}.$$

⋆ Question 4. : Résoudre $(E) : (1 - t^2)y' - y = 0$ sur $]-1; 1[$.

— L'équation $(E)$ est homogène et comme, pour tout $t \in ]-1; 1[$, $1 - t^2 > 0$, elle équivaut à $y' - \frac{1}{1-t^2}y = 0$. Ainsi, $(E)$ a pour solution générale :

$$t \mapsto \lambda e^{\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

— Il nous reste à déterminer une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ sur $]-1;1[$. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{dt} &= -\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,\mathrm{dt} \\
&= -\int \left[\frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}\right]\mathrm{dt} \quad \text{[après décomposition en éléments simples]} \\
&= -\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right]\mathrm{dt} \\
&= -\frac{1}{2}\left[\ln|t-1| - \ln|t+1|\right] + C \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) + C \quad \text{[car, pour } t \text{ entre } -1 \text{ et } 1,\ t-1<0 \text{ et } t+1>0] \\
&= \ln\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right) + C \quad \text{avec } C \in R.
\end{aligned}$$

— Conclusion : $(E)$ a pour solution générale :

$$t \mapsto \lambda\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$