Devoir maison n°1, à rendre le vendredi 13 octobre 2023

Retour sur le DS n°1

1. Ecrire les nombres suivants sous la forme a^N où a est un entier **positif** le plus petit possible et N un entier relatif.

   (a) $(-7)^{-4} \times 7^3$

   (b) $\left(\dfrac{15^2 \times 15^{11}}{15^{10} \times 15^6}\right)^9$

   (c) $2 \times 3^n + 3^n$

   (d) $4^{n+1} + 12 \times 2^{2n}$

2. Résoudre l' inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{-3x}{x+2} > \frac{2}{3-x}$$

Exercices sur les suites

Exercice n°1 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ les deux suites définies par : $u_1 = 2,\ v_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(-2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n - 2v_n) \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et v_2 puis u_3 et v_3.
2. On définit les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Montrer que les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques.
   (b) En déduire des expressions explicites de t_n et s_n.
3. En déduire des expressions explicites de u_n et v_n.

Exercice n°2 :

On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_3 = -8, \quad u_3 + u_4 + \ldots + u_{29} = -567$.
Déterminer la raison de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n^2 \end{cases}$$

Déterminer une forme explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication : On pourra (mais il n'y a aucune obligation) construire, à partir de (u_n), une suite auxiliaire (v_n) arithmético-géométrique.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆