# Devoir libre n°1, à rendre le mardi 3 novembre 2020

---

## Exercice n°1 Utilisation des nombres complexes

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Montrer que : $\dfrac{(2+i)^2}{7+i} = \dfrac{1+i}{2}$.

   (b) En déduire la relation : $2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Soit $a \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E): \quad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = \frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}.$$

   (a) Mettre $\dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}$ sous forme trigonométrique (on utilisera $\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$).

   (b) En déduire les solutions de l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ : $\quad Z^5 = \dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}$.

   (c) Proposer une simplification de l'expression $\dfrac{e^{i\theta}-1}{i(e^{i\theta}+1)}$. Vous préciserez également le domaine de validité de cette relation.

   (d) Déduire les solutions de $(E)$ des deux questions précédentes.

## Exercice n°2 Etablir une relation avec arctan et calcul d'une somme

1. Dans cette question, on cherche à établir la relation :

$$(\star): \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

   (a) **Méthode n°1 :**

      (i) Etudier la fonction $f : x \mapsto \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$.

      (ii) En déduire $(\star)$.

   (b) **Méthode n°2 :**

      (i) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \arctan(x+1) - \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$.

      (ii) Comparer (après avoir justifié leurs existences) les tangentes des deux membres de $(\star)$.

      (iii) En déduire $(\star)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

## Exercice n°3 Quelques calculs de sommes trigonométriques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$

Cette somme a déjà été calculée en cours à l'aide des nombres complexes, on propose ici un méthode alternative utilisant les propriétés de la somme et le formulaire de trigonométrie. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $S_n(x) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)\right]$.

   (b) A l'aide d'un changement d'indice (un décalage), montrer que

$$S_n(x) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

   (c) En déduire que, pour tout $x$ dans un ensemble $D$ à déterminer :

$$\boxed{S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

   (d) Donner l'expression de $S_n(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R} \backslash D$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(kx)$$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_n(x) = S_n(x + \pi)$.

   (b) A l'aide des résultats précédents, montrer que, pour tout $x$ dans un ensemble $E$ à déterminer :

$$\boxed{A_n(x) = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad I_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \cos(kx)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

   (a) A l'aide des questions 1. et 2., calculer les sommes : $P_n(x) + I_n(x)$ et $P_n(x) - I_n(x)$.

   (b) En déduire la valeur de $P_n(x)$ et $I_n(x)$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆