Devoir maison n°10, à rendre le jeudi 6 juin 2024

La sujet est composé de deux problèmes. Il est obligatoire d'en traiter au moins un des deux.

Exercice n°1 Variables aléatoires finies et étude d'un jeu

Soit n un entier naturel non nul. Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant. Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (éventuellement négatif). Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que $P(A) = \dfrac{13}{27}$.
2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « A ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

4. (a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
   (b) Démontrer que $E(Y) = 2P(A) - 1$.
5. (a) Donner la loi de X.
   (b) En déduire que l'on a également : $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, puis que $E(Y) = (1-2p)^n$.
6. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.
7. Démontrer que : $P(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \iff \left[p \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$.

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $P(A) \geqslant \dfrac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire $E(G) \leqslant 0$).

8. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que $E(G) = 10 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k)$.
9. Démonter que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
10. Montrer que $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.
11. Démontrer alors que : $P(A) \geqslant \dfrac{1}{2}$ ET $E(G) \leqslant 0 \iff p \leqslant \dfrac{1}{2}$.
12. (a) Etudier la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right],\ f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.
    (b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est-à-dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

$--$ > **Tournez la page**

Exercice n°2 Variables aléatoires discrètes et étude d'un temps d'attente

On considère un jeu consistant à lancer successivement deux dés équilibrés. Les lancers sont supposés indépendants. On notera :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé ;
- E_1 est l'événement $(D_1 < D_2)$, E_2 est l'événement $(D_1 = D_2)$ et E_3 est l'événement $(D_1 > D_2)$.

Lors d'une partie :

- Si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point ;
- Si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque deux points ;
- Si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque un point.

Partie n°1 : Etude de parties successives

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Le joueur joue successivement n parties.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, on note :

- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de point marqués lors de la i-ème partie ;
- Y_i la variable aléatoire représentant le nombre de point marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3 (représenter l'ensemble des tirages possibles à l'aide d'un tableau).
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i, puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.
4. (a) Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$. En déduire l'espérance de Y_n.
   (b) Combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir en moyenne strictement plus de 10 points ?

Partie n°2 : Etude d'un temps d'attente

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.
Plus précisément, on note T_1 (resp. T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (resp. 2) pour la première fois, si cet événement se produit.

Par exemple, si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :

- $0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2\ \ldots$ alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$;
- $0\ 0\ 0\ 2\ 1\ 2\ \ldots$ alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

5. (a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par T_1, puis dire, pour tout $k \in T_1(\Omega)$, la signification de l'événement $[T_1 = k]$.
   (b) Reconnaître la loi de T_1 et donner, pour tout $k \in T_1(\Omega)$, la valeur de $P(T_1 = k)$.
6. (a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par T_2.
   (b) Ecrire les événements $[T_2 = 1]$ et $[T_2 = 2]$ à l'aide de certains des événements $[X_1 = i]$ et $[X_2 = j]$ où $i, j \in [\![0, 2]\!]$. En déduire $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 3}$. A l'aide de certains des événements $[X_1 = i]$ et $[X_2 = j]$ où $i, j \in [\![0, 2]\!]$, écrire les deux événements suivants :
   - obtenir 0 points lors des $k-1$ premières parties puis obtenir 2 points à la k-ième ;
   - obtenir exactement 1 point lors des $k-1$ premières parties puis obtenir au moins 1 point à la k-ième.

   (d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 3}$, on a :
   $$P(T_2 = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}.$$
   (e) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?
   (f) Etablir que $\sum_{k \geqslant 1} P(T_2 = k)$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = 1$.
   (g) Que peut-on en déduire concernant l'événement : « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?
   (h) Justifier que T_2 possède une espérance et la calculer.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆