ECG1

Devoir maison n°1, à rendre le vendredi 30 septembre 2022

Etude d'une fonction - Equations, inéquations

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifier que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $X^2 - X + 1 > 0$.
2. En déduire l'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$.

Dans la suite, on admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

3. Déterminer, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de f (sans les limites) et observer que f admet un minimum dont on donnera la valeur exacte et une valeur exacte en laquelle il est atteint.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
6. En quel(s) point(s) $\mathscr{C}_f$ admet-elle un tangente horizontale ?
7. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
8. Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}\right)$.
9. Etudier le signe de $f(x) - 2x$ suivant les valeurs de $x \in \mathscr{D}_f$. Que peut-on en déduire sur la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto 2x$?
10. Soit $k \in \mathbb{R}$. Discuter, par le calcul et suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - e^x + 1 = k$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆

ECG1

Devoir maison n°1, à rendre le vendredi 30 septembre 2022

Etude d'une fonction - Equations, inéquations

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifier que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $X^2 - X + 1 > 0$.
2. En déduire l'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$.

Dans la suite, on admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

3. Déterminer, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de f (sans les limites) et observer que f admet un minimum dont on donnera la valeur exacte et une valeur exacte en laquelle il est atteint.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
6. En quel(s) point(s) $\mathscr{C}_f$ admet-elle un tangente horizontale ?
7. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
8. Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}\right)$.
9. Etudier le signe de $f(x) - 2x$ suivant les valeurs de $x \in \mathscr{D}_f$. Que peut-on en déduire sur la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto 2x$?
10. Soit $k \in \mathbb{R}$. Discuter, par le calcul et suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - e^x + 1 = k$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆