Correction du devoir maison n°1,

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifier que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $X^2 - X + 1 > 0$.

   Le discriminant du trinôme $X^2 - X + 1$ *est* $(-1)^2 - 4.1.1 = -3 < 0$. *Ainsi,* $\boxed{\textit{pour tout } X \in \mathbb{R},\ X^2 - X + 1 > 0}$.

2. En déduire l'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$.

   On a $x \in \mathscr{D}_f \iff e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$. *Or, par la question précédente, pour tout* $X \in \mathbb{R}$, $X^2 - X + 1 > 0$. *Donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *en notant* $X = e^x$, *on obtient* $e^{2x} - e^x + 1 = (e^x)^2 - e^x + 1 = X^2 - X + 1 > 0$. *Par conséquent,* $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$.

Dans la suite, on admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

3. Déterminer, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x)$.

   Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a :

$$f'(x) = \left(\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)\right)' = \frac{\left(e^{2x} - e^x + 1\right)'}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}.$$

4. En déduire le tableau de variation de f (sans les limites) et observer que f admet un minimum dont on donnera la valeur exacte et une valeur exacte en laquelle il est atteint.

   Soit $x \in \mathscr{D}_f$. D'après la question précédente, le signe de $f'(x)$ est le signe de $2e^x - 1$ car $e^x > 0$ et $e^{2x} - e^x + 1 > 0$.
   On en déduit que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 2e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

   Comme $f(-\ln(2)) = f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$, *on en déduit le tableau de variation de f :*

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	

   Ainsi, f possède un minimum global qui est $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ *atteint en* $-\ln(2)$.

5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

   Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant 0 &\iff \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) \geqslant 0 \\
&\iff e^{2x} - e^x + 1 \geqslant e^0 = 1 \quad \textit{[par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{]} \\
&\iff e^{2x} - e^x \geqslant 0 \\
&\iff e^x(e^x - 1) \geqslant 0 \\
&\iff e^x - 1 \geqslant 0 \quad \textit{[car } e^x > 0\textit{]} \\
&\iff e^x \geqslant 1 \\
&\iff x \geqslant \ln(1) = 0 \quad \textit{[par stricte croissance de } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^\star\textit{]}
\end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\boxed{[0, +\infty[}$.

6. En quel(s) point(s) $\mathscr{C}_f$ admet-elle un tangente horizontale ?

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en tout point d'abscisse $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f'(x) = 0$. Soit $x \in \mathscr{D}_f$, on a :

$$f'(x) = 0 \iff e^x(2e^x - 1) = 0 \iff x = -\ln(2).$$

Donc $\mathscr{C}_f$ admet une unique tangente horizontale au point d'abscisse $-\ln(2)$ qui est $\boxed{\left(-\ln(2), \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)}$.

7. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Comme $f'(0) = \dfrac{e^0(2e^0-1)}{e^0 - e^0 + 1} = 1$ et que $f(0) = \ln\left(e^0 - e^0 + 1\right) = 0$, l'équation recherchée est $\boxed{y = x}$.

8. Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}\right)$.

Soit $x \in \mathscr{D}_f$. Il suffit de factoriser par e^{2x} l'expression « sous le $\ln$ », précisément :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) = \ln\left(e^{2x}\left(1 - \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right)\right) = \ln\left(e^{2x}\right) + \ln\left(1 - \frac{e^x - 1}{e^{2x}}\right) = 2x + \ln\left(1 - \frac{e^x - 1}{e^{2x}}\right).$$

9. Etudier le signe de $f(x) - 2x$ suivant les valeurs de $x \in \mathscr{D}_f$. Que peut-on en déduire sur la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto 2x$?

On utilise la relation établie à la question précédente. Ainsi, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - 2x \geqslant 0 &\iff \ln\left(1 - \frac{e^x - 1}{e^{2x}}\right) \geqslant 0 \\
&\iff 1 - \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \geqslant 1 \quad \textit{[par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{]} \\
&\iff \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \leqslant 0 \\
&\iff e^x - 1 \leqslant 0 \quad \textit{[car } e^{2x} > 0\textit{]} \\
&\iff e^x \leqslant 1 \\
&\iff x \leqslant 0 \quad \textit{[par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^\star\textit{]}
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{f(x) - 2x \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, 0] \quad \textit{et} \quad f(x) - 2x \leqslant 0 \iff x \in [0, +\infty[}$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 2x$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}_-$ et au-dessus sur $\mathbb{R}_+$.

10. Soit $k \in \mathbb{R}$. Discuter, par le calcul et suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - e^x + 1 = k$.

Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble de définition de l'équation $(E) :\ e^{2x} - e^x + 1 = k$ est $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{2x} - e^x + 1 = k \iff e^{2x} - e^x + 1 - k = 0 \iff \begin{cases} X^2 - X + 1 - k = 0 \\ X = e^x > 0 \end{cases}$$

Le discriminant du trinôme $X^2 - X + 1 - k$ est $(-1)^2 - 4.1.(1-k) = 4k - 3$. Trois cas sont donc envisageables :

- *Si* $\boxed{4k - 3 < 0 \Leftrightarrow k < \frac{3}{4}}$, *l'équation $X^2 - X + 1 - k = 0$ n'a pas de solution réelle et, par conséquent* $\boxed{\textit{l'équation } (E) \textit{ n'a pas de solution}}$.
- *Si* $\boxed{4k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}}$, *et l'équation $X^2 - X + 1 - k = 0$ possède un unique solution qui est $X = \frac{1}{2}$.*
  Ainsi $(E) \iff e^x = \dfrac{1}{2} \iff x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, et $\boxed{\textit{l'équation } (E) \textit{ possède une unique solution qui est } -\ln(2)}$.
- *Si* $\boxed{4k - 3 > 0 \Leftrightarrow k > \frac{3}{4}}$, *l'équation $X^2 - X + 1 - k = 0$ possède deux racines réelles distinctes qui sont :*

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{4k-3}}{2} \quad \textit{et} \quad X_2 = \frac{1 + \sqrt{4k-3}}{2}.$$

  Ainsi $(E) \iff \begin{cases} e^x = X_1 \\ \boxed{\textit{ou}} \\ e^x = X_2 \end{cases}$. *Il est clair que, pour tout $k > \dfrac{3}{4}$, $X_2 > 0$ et donc l'équation $e^x = X_2$ possède une unique solution qui est $x = \ln(X_2) = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{4k-3}}{2}\right)$. Quant à l'équation $e^x = X_1$, elle possèdera une* *solution (unique) seulement lorsque* $X_1 > 0$*; cette solution sera* $x = \ln(X_1) = \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{4k-3}}{2}\right)$. *Il reste à déterminer les valeurs de* $k > \dfrac{3}{4}$ *telles que* $X_1 > 0$. *Comme :*

$$X_1 > 0 \iff \frac{1-\sqrt{4k-3}}{2} > 0 \iff 1 > \sqrt{4k-3} \iff 1 > 4k-3 \iff 1 > k,$$

on conclut que, dans le cas où $k > \dfrac{3}{4}$ *:*

— *Si* $\boxed{1 > k > \dfrac{3}{4}}$ *alors* $\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ possède exactement deux solutions : } \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{4k-3}}{2}\right) \text{ et } \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{4k-3}}{2}\right)}$.

— *Si* $\boxed{k \geqslant 1}$ *alors* $\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ possède une unique solution qui est } \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{4k-3}}{2}\right)}$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆