Correction DM n°1

Retour sur le DS n°1 : voir correction du DS n°1.

Exercice n°1 :

1) $u_2 = \frac{1}{3}(-2u_1 + v_1) = \frac{1}{3}(-2\times 2 - 1) = -\frac{5}{3}$

$v_2 = \frac{1}{3}(u_1 - 2v_1) = \frac{1}{3}(2 - 2\times(-1)) = \frac{4}{3}$

$u_3 = \frac{1}{3}(-2u_2 + v_2) = \frac{1}{3}\left(-2\times\left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{4}{3}\right) = \frac{14}{9}$

$v_3 = \frac{1}{3}(u_2 - 2v_2) = \frac{1}{3}\left(-\frac{5}{3} - 2\times\frac{4}{3}\right) = -\frac{13}{9}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} t_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{1}{3}(-2u_n + v_n) - \frac{1}{3}(u_n - 2v_n) \\ &= \frac{1}{3}(-2u_n + v_n - u_n + 2v_n) \\ &= \frac{1}{3}(-3u_n + 3v_n) \\ &= -(u_n - v_n) = -t_n \end{aligned}$$

Donc (t_n) est géométrique de raison -1.

$$\begin{aligned} s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} &= \frac{1}{3}(-2u_n + v_n) + \frac{1}{3}(u_n - 2v_n) \\ &= \frac{1}{3}(-2u_n + v_n + u_n - 2v_n) \\ &= \frac{1}{3}(-u_n - v_n) \\ &= -\frac{1}{3}(u_n + v_n) = -\frac{1}{3}s_n \end{aligned}$$

Donc (s_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b) Comme $t_1 = u_1 - v_1 = 3$, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, t_n = 3\times(-1)^{n-1}$.

De même, comme $s_1 = u_1 + v_1 = 1$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, s_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$\begin{cases} t_n = 3.(-1)^{n-1} \\ s_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} u_n - v_n = 3.(-1)^{n-1} \\ u_n + v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} u_n = 3.(-1)^{n-1} + v_n \\ 3.(-1)^{n-1} + 2v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_n = 3.(-1)^{n-1} + v_n \\ v_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3.(-1)^{n-1}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3.(-1)^{n-1}}{2} \\ v_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3.(-1)^{n-1}}{2} \end{cases}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3(-1)^{n-1}}{2}$, $v_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3(-1)^{n-1}}{2}$.

Exercice n°2 :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant arithmétique, on sait que :

$$u_3 + u_4 + \dots + u_{29} = \frac{(29-3+1)(u_3 + u_{29})}{2} = \frac{27(-8 + u_{29})}{2} \quad (*)$$

De plus, si on note $r \in \mathbb{R}$, la raison de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $u_{29} = u_3 + (29-3)r$ autrement dit $u_{29} = -8 + 26r$. On déduit de $(*)$ que :

$$-567 = u_3 + u_4 + \dots + u_{29} = \frac{27(-8 + u_{29})}{2} = \frac{27(-16 + 26r)}{2} = 27(-8 + 13r)$$

on trouve alors que $r = \left(\dfrac{-567}{27} + 8\right) \div 13 = (-21 + 8) \div 13 = -1$.

Donc $r = -1$.

Exercice n°3 : (On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, à montrer par récurrence). ③

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(u_n) \quad (\text{licite car } u_n > 0 \text{ sur } \mathbb{N})$$

On a : $v_0 = \ln(u_0) = \ln(1) = 0$ et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(2u_n^2) &= \ln(2) + \ln(u_n^2) \\ &= \ln(2) + 2\ln(u_n) \\ &= \ln(2) + 2v_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- On considère $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = \ln(2) + 2l$ ie $\underline{l = -\ln(2)}$,
- La suite $(v_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2, car :

$$v_{n+1} - l = v_{n+1} + \ln 2 = 2v_n + 2\ln 2 = 2(v_n + \ln 2) = 2(v_n - l).$$

Ainsi, comme $v_0 - l = 0 + \ln 2 = \ln 2$, on a :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - l = (\ln 2) \times 2^n}$$

on obtient : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (\ln 2) \times 2^n - \ln 2}$

On conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n = \exp(v_n) &= \exp\left((\ln 2) \times 2^n - \ln 2\right) \\ &= \exp\left(\ln\left(2^{2^n}\right) - \ln 2\right) \\ &= \exp\left(\ln\left(2^{2^n - 1}\right)\right) \\ &= 2^{2^n - 1} \end{aligned}$$