Correction du DM n°1

Exercices n°1 et 2 : Voir la correction du DS n°2

Exercice n°3 :

1) $u_0 = 0$; $u_1 = \dfrac{3\times 0+6}{0+4} = \dfrac{3}{2}$; $u_2 = \dfrac{3\times\frac{3}{2}+6}{\frac{3}{2}+4} = \dfrac{\frac{21}{2}}{\frac{11}{2}} = \dfrac{21}{11}$

$$u_3 = \frac{3\times\frac{21}{11}+6}{\frac{21}{11}+4} = \frac{\frac{129}{11}}{\frac{65}{11}} = \frac{129}{65}.$$

2) a) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{3(x+4)-(3x+6)}{(x+4)^2} = \dfrac{6}{(x+4)^2} > 0$.
On en déduit :

x	0	2	$+\infty$
f	$\frac{3}{2}$ $\nearrow$	2	$\nearrow$ 3

• $\dfrac{3x+6}{x+4} = \dfrac{3+\frac{6}{x}}{1+\frac{4}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f(x) = x \iff \frac{3x+6}{x+4} = x \iff 3x+6 = x(x+4)$$
$$\iff x^2+x-6 = 0$$
$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -3 \end{cases}$$
$$\iff x = 2$$

La fonction f a pour unique point fixe 2.

c) L'intervalle $[0;2]$ est stable par f et contient $u_0 = 0$.
En effet : $f([0;2]) = [\frac{3}{2};2] \subset [0;2]$.

3) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition
$\mathcal{P}(n)$: " u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai car $u_0 = 0$ (par définition) et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  On suppose donc que u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$
  donc $u_n \neq -4$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 6}{u_n + 4}$ est bien défini.
  Pour montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, deux méthodes sont présentées :

  <u>Méthode n°1</u> : Comme $[0;2]$ est stable par f et que $u_n \in [0;2]$, on a : $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;2]$.

  <u>Méthode n°2</u> : On aurait pu directement utiliser la croissance de f sur $[0;2]$ en écrivant :
  Comme $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et f croissante sur $[0;2]$, on a :
  $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2)$ i.e. $0 \leqslant \frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.
- Le principe de récurrence nous assure que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \leqslant u_{n+1}$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{3}{2}$ donc $u_0 \leq u_1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  On a : . $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in [0;2]$

  . $u_n \leqslant u_{n+1}$

  Donc, par croissance de f sur l'intervalle $[0;2]$, on obtient :
  $$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.