Devoir libre n°2, à rendre le mardi 24 novembre 2020

Exercice n°1 Résolution d'une équation fonctionnelle par analyse-synthèse

On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les contraintes :

$$(C) : \quad f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\, f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour résoudre ce problème on raisonne par **analyse-synthèse**.

1. **Analyse :** On **suppose** l'existence d'une fonction f vérifiant (C).
   (a) Montrer que f est deux fois dérivable (i.e. que f' est dérivable) et donner une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants nécessairement vérifiée par f.
   (b) En déduire qu'il existe des réels λ et μ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = \lambda + \mu e^x$.

   A ce stade, on a montré que, si une fonction vérifie (C) alors elle est **obligatoirement** dans l'ensemble
   $$\{x \longmapsto \lambda + \mu e^x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
2. **Synthèse :** Soient λ et μ deux réels et $f : x \mapsto \lambda + \mu e^x$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et μ pour que f vérifie (C).
3. **Conclusion :** Ecrire l'ensemble des fonctions vérifiant (C).

Exercice n°2 Résolution d'une EDL d'ordre deux à coefficients variables avec second membre

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'EDL d'ordre deux à coefficients variables suivante :

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad x^2 y''(x) - \frac{3}{4} y(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

1. Résoudre $(E_1) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - z(t) = 4e^{-t}$.
2. Soit y une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad z(t) = e^{-\frac{t}{2}} y(e^t)$.
   (a) Justifier que z est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de manière consciencieuse.
   (b) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et de ses dérivées.
   (c) En déduire que z est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $y(x)$ à l'aide de la fonction z, puis résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆