Travail en mathématiques pour les vacances de la Toussaint

Votre travail est divisé en trois parties :

- des exercices de révision sur les thèmes abordés lors de la première période.
  La correction de ces exercices sera disponible sur la page web du cours à partir du lundi 30 octobre.
- un DM à rendre le lundi 6 novembre.
  On rappelle qu'aucun retard ne sera toléré, quel que soit le motif.
- Python : faire l'exercice n°5 du TP n°3. Vous pouvez tester vos scripts à l'adresse https://trinket.io/features/python3

Exercices de révision

Exercice n°1 : Entrainement sur WIMS

Sur votre compte WIMS : travailler sur la feuille d'exercices WIMS 4. Cette feuille d'exercices WIMS est composée de 4 exercices sur les manipulations de puissances et les propriétés des fonctions exp et ln. A travailler $10-15$ minutes très régulièrement.

Exercice n°2 : Entrainement sur les polynômes et résolution d'inéquation

On considère le polynôme P définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

1. Factoriser le polynôme P en l'écrivant comme un produit de polynômes de degré un.
2. A l'aide de la question 1., résoudre l'inéquation , d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\quad P(x) > 0$.
3. A l'aide de la question 1., résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,
$$6(\ln(x))^4 + 7(\ln(x))^3 + 1 \leqslant 3(\ln(x))^2 + 3\ln(x).$$

Exercice n°3 : Entrainement sur les études de fonctions

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

Objectif : Dresser le tableau de variation de la fonction f. Pour cela, répondre aux questions suivantes :

1. Question préliminaire : On considère la fonction g définie par $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de g.
   On admettra que g est dérivable sur $\mathscr{D}_g$
   (b) Calculer, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g'(x)$.
   (c) Dresser le tableau de variation de g (sans les limites). En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathscr{D}_g$.
2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

On admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$

3. Calculer, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x)$. Ecrire $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$.
4. Déduire de la question 1.(c) le signe de $f'(x)$ sur $\mathscr{D}_f$.
5. En déduire le tableau de variation de f (sans les limites).
6. Python : Ecrire une fonction Python f prenant pour argument x et qui renvoie la valeur de $f(x)$ si $x \in \mathscr{D}_f$ et la chaîne de caractère : "x n'appartient pas à $\mathscr{D}_f$" lorsque $x \notin \mathscr{D}_f$.

Exercice n°4 : Entrainement sur les suites (les réponses sont données pour vérification)

1. Déterminer une expression explicite pour chacune des suites suivantes :
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie par : $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $u_{n+1} = -2 + u_n$ **réponse :** $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad u_n = 3 - 2n$.
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 6 - \dfrac{1}{2}v_n$ **réponse :** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 4 - 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$. En utilisant les réponses de la question précédente, calculer les sommes suivantes :
$$S_1 = \sum_{i=3}^{n+1} u_i \quad (\textbf{réponse :}\ 1 - n^2) \qquad S_2 = \sum_{j=3}^{n+1} v_j \quad \left(\textbf{réponse :}\ 4n - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{15}{4}\right)$$

DM n°2 à rendre le lundi 6 novembre 2023

Pour toute question sur le DM (précisions, aide, demande de correction...), me contacter par mail.

On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On notera $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ce nombre est appelé le « nombre d'or ») et $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que $\varphi + \overline{\varphi} = 1$, puis que $\varphi\overline{\varphi} = -1$
2. Sans raisonner par récurrence, justifier qu'une expression explicite de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \overline{\varphi}^n\right).$$
3. En utilisant le résultat de la question précédente et sans raisonner par récurrence, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

4. En utilisant un raisonnement par récurrence double, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = F_{n+1} + 2F_n.$$
5. En utilisant un raisonnement par récurrence simple, déduire de la question précédente que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} L_k = F_{n+3} + F_{n+1} - 1.$$

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆