Devoir maison n°2

A rendre le mardi 18 octobre 2022

Utilisation des fonctions usuelles pour modéliser une situation en économie

Une multinationale lance une campagne publicitaire sur les chaînes télévisées, pour lancer un produit mis sur le marché. Après une étude de vente auprès de ces chaînes, le service marketing fournit les chiffres suivants, donnant le coût engendré par la diffusion de certaines durées de publicité (cumulées sur un mois) :

Nombres d'heures t de pub	0	1	2	4	6
Coût $C(t)$ (en millions d'euros)	1	$20,5$	$29,5$	41	50

Le but de ce problème est de conseiller l'entreprise pour qu'elle mette en oeuvre la meilleure stratégie commerciale en temps publicitaire.

Partie A : Etude du coût

1. Peut-on modéliser la fonction $t \mapsto C(t)$ de coût comme une fonction affine de t ? Justifier.
2. On pose $x = \ln(t)$ et $y = \ln(C(t))$.
   (a) Justifier qu'il est **acceptable** de proposer une modélisation affine pour exprimer y en fonction de x. On pourra, proprement, réaliser un graphique. Pour cette question, une calculatrice peut être utilisée.
   (b) Proposer **une** expression adéquate de y en fonction de x. Vous expliquerez, avec précision, la démarche que **vous** avez utilisé et vous préciserez **vos** coefficients exacts (non arrondis).
   (c) En supposant l'égalité précédente exacte, en déduire **votre** expression de $C(t)$ sous la forme λt^{α}, avec λ et α deux réels à préciser.

Afin d'uniformiser les différentes recherches, on considère, dans toute la suite du devoir, que l'expression de C est :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad C(t) = 20\sqrt{t} + 1}.$$

3. Exprimer la fonction g qui, au nombre de **minutes** $n \in \mathbb{R}_+$ de diffusion publicitaire, associe le coût $g(n)$ en **euros**.

Partie B : Etude des coûts marginaux discret et continu

Soit $n \in \mathbb{R}_+$.

- Le **coût marginal discret**, noté $C_m(n)$, est la variation de coût induite par la diffusion d'une minute supplémentaire de publicité après la n-ième minute. Autrement dit, c'est le coût de la $(n+1)$-ième minute de diffusion.
- Le **coût marginal continu** est la variation de coût induite par la diffusion d'une durée « infinitésimale » supplémentaire de publicité après la n-ième minute. Autrement dit, c'est le nombre dérivé en n de la fonction de coût g, ie $g'(n)$.

1. Prouver que $C_m(n) = \dfrac{10^7}{\sqrt{15}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)$.
2. Déterminer les variations de la fonction C_m.
3. Comparer les réels $g'(n)$ et $C_m(n)$ pour tout $n \in \mathbb{R}_+$.
4. *Pour les étudiants ayant fait la spécialité maths en terminale :*
   Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des fonctions g' et C_m. Justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{g'(n)}{C_m(n)} = 1$.

Partie C : Etude du bénéfice

On suppose de plus qu'une minute de diffusion publicitaire rapporte, par les ventes engendrées, 100000 euros.
On définit le bénéfice comme la différence de la recette et du coût.

1. Montrer que la fonction B qui, au nombre de minutes de diffusion publicitaire, associe le bénéfice correspondant, en euros, s'exprime par : $B(n) = 10^5 \left(n - \dfrac{100}{\sqrt{15}} \sqrt{n} - 10 \right)$.
2. Résoudre algébriquement les problèmes suivants (les résultats **exacts** sont attendus) :
   (a) Pour quelles durées de diffusion publicitaire l'entreprise ne perd pas d'argent ?
   (b) Quelles sont les pertes maximales que peut engendrer une durée de diffusion mal calibré ?

   On arrondira **ensuite** les résultats obtenus à la minute et au millier d'euros près.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆