Correction du devoir maison n°2

Utilisation des fonctions usuelles pour modéliser une situation en économie

Une multinationale lance une campagne publicitaire sur les chaînes télévisées, pour lancer un produit mis sur le marché. Après une étude de vente auprès de ces chaînes, le service marketing fournit les chiffres suivants, donnant le coût engendré par la diffusion de certaines durées de publicité (cumulées sur un mois) :

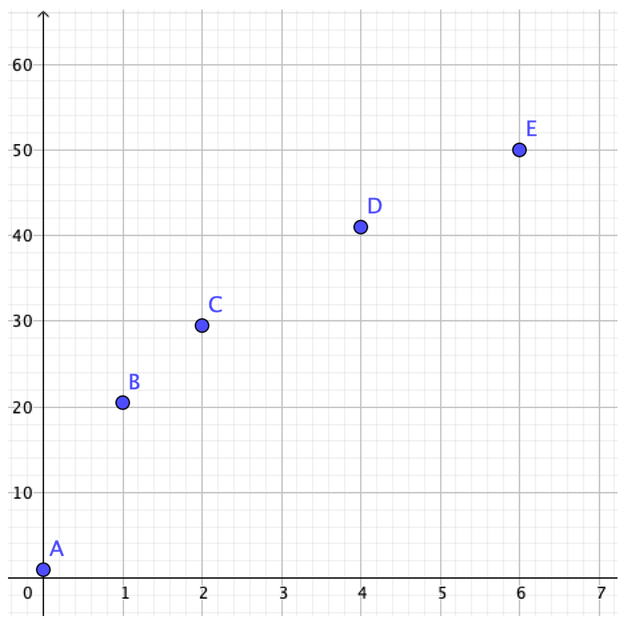
Nombres d'heures t de pub	0	1	2	4	6
Coût $C(t)$ (en millions d'euros)	1	$20,5$	$29,5$	41	50

Le but de ce problème est de conseiller l'entreprise pour qu'elle mette en oeuvre la meilleure stratégie commerciale en temps publicitaire.

Partie A : Etude du coût

1. Peut-on modéliser la fonction $t \mapsto C(t)$ de coût comme une fonction affine de t ? Justifier.

   On a $C(0) = 1$, $C(1) = 20,5$ *et* $C(2) = 29,5$. *Pour un accroissement de* 1 *sur les abscisses, on obtient deux accroissements différents (*$19,5$ *pui s* 9*) sur les ordonnées. Autrement dit* $\dfrac{C(1)-C(0)}{1-0} \neq \dfrac{C(2)-C(1)}{2-1}$. *Ainsi, la fonction* $t \mapsto C(t)$ *de coût ne peut pas être modélisée comme une fonction affine de* t.



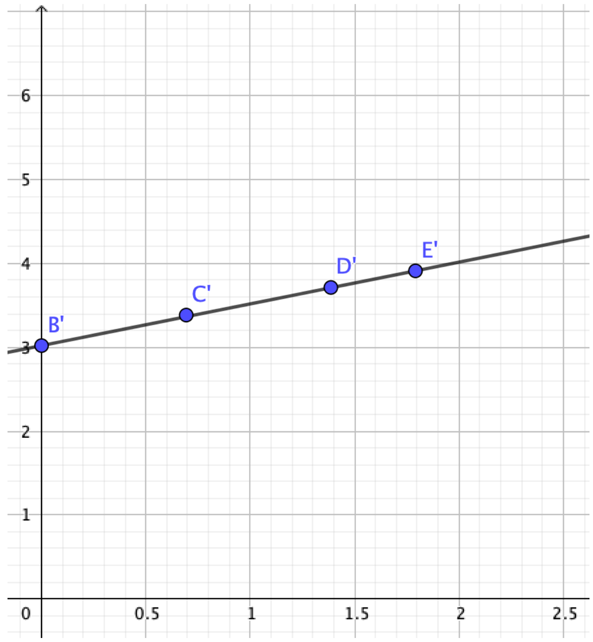
2. On pose $x = \ln(t)$ et $y = \ln(C(t))$.

   (a) Justifier qu'il est **acceptable** de proposer une modélisation affine pour exprimer y en fonction de x. On pourra, proprement, réaliser un graphique. Pour cette question, une calculatrice peut être utilisée.

   On a :

$\ln(t)$	$\notin \mathbb{R}$	0	$\ln(2)$	$\ln(4)$	$\ln(6)$
$\ln(C(t))$	$\notin \mathbb{R}$	$\ln(20,5)$	$\ln(29,5)$	$\ln(41)$	$\ln(50)$

   En représentant les 4 *points de coordonnées* (x, y) *dans un repère orthonormé, on observe sur la figure un quasi-alignement. On peut donc conjecturer une relation affine entre* x *et* y.



(b) Proposer **une** expression adéquate de y en fonction de x. Vous expliquerez, avec précision, la démarche que **vous** avez utilisé et vous préciserez **vos** coefficients exacts (non arrondis).

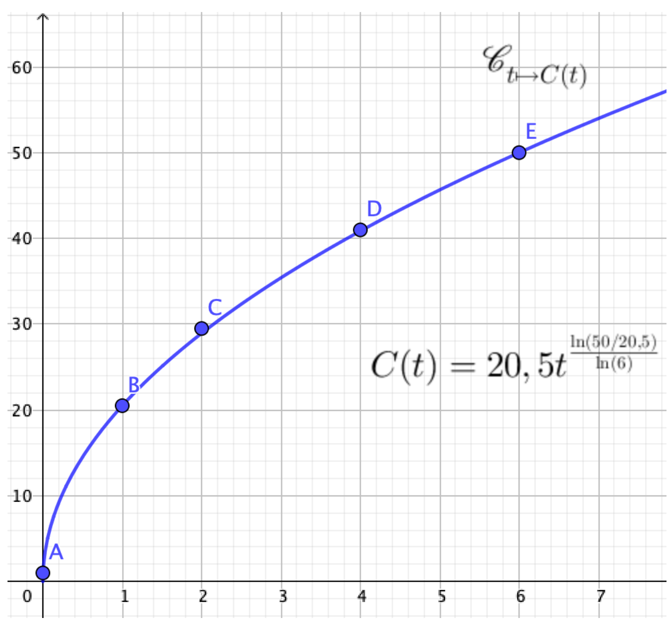
L'équation de la droite (AB) *passant par les points de coordonnées* $A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$ *est donnée par*

$$(AB): \quad y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A.$$

Ici, il suffit de choisir deux points parmi les 4. *On peut, par exemple, choisir les points les plus éloignés. Soit* $A(0, \underbrace{\ln(20,5)}_{\text{ordonnée à l'origine}})$ *et* $B(\ln(6), \ln(50))$. *On obtient* $\boxed{y = \dfrac{\ln(50/20,5)}{\ln(6)}x + \ln(20,5)}$.

(c) En supposant l'égalité précédente exacte, en déduire **votre** expression de $C(t)$ sous la forme λt^{α}, avec λ et α deux réels à préciser.

La relation obtenue à la question précedente, en revenant à la variable t, devient : $\ln(C(t)) = \dfrac{\ln(50/20,5)}{\ln(6)}\ln(t) + \ln(20,5)$. *D'où* $\ln(C(t)) = \ln\left(20,5t^{\frac{\ln(50/20,5)}{\ln(6)}}\right)$ *ou encore* $\boxed{C(t) = 20,5t^{\frac{\ln(50/20,5)}{\ln(6)}}}$.



Afin d'uniformiser les différentes recherches, on considère, dans toute la suite du devoir, que l'expression de C est :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad C(t) = 20\sqrt{t} + 1}.$$

3. Exprimer la fonction g qui, au nombre de **minutes** $n \in \mathbb{R}_+$ de diffusion publicitaire, associe le coût $g(n)$ en **euros**.

   Soit $n \in \mathbb{R}_+$. D'après les conversions usuelles, on a : $x = \frac{n}{60}$, d'où $C(x) = C\left(\frac{n}{60}\right)$. Or, $g(n)$ est en euros donc :

$$g(n) = 10^6 C\left(\frac{n}{60}\right) = 10^6\left(20\sqrt{\frac{n}{60}} + 1)\right) = 20.10^6\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4.15}} + 10^6 = 10.10^6\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{15}} + 10^6 = \frac{10^7}{\sqrt{15}}\sqrt{n} + 10^6.$$

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{R}_+, \ g(n) = \frac{10^7}{\sqrt{15}}\sqrt{n} + 10^6}$.

Partie B : Etude des coûts marginaux discret et continu

Soit $n \in \mathbb{R}_+$.

- Le **coût marginal discret**, noté $C_m(n)$, est la variation de coût induite par la diffusion d'une minute supplémentaire de publicité après la n-ième minute. Autrement dit, c'est le coût de la $(n+1)$-ième minute de diffusion.
- Le **coût marginal continu** est la variation de coût induite par la diffusion d'une durée « infinitésimale » supplémentaire de publicité après la n-ième minute. Autrement dit, c'est le nombre dérivé en n de la fonction de coût g, ie $g'(n)$.

1. Prouver que $C_m(n) = \frac{10^7}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)$.

   Le coût de $(n+1)$-ième minute de diffusion vaut :

$$\begin{aligned} C_m(n) = g(n+1) - g(n) = \frac{10^7}{\sqrt{15}}\sqrt{n+1} + 10^6 - \frac{10^7}{\sqrt{15}}\sqrt{n} - 10^6 &= \frac{10^7}{\sqrt{15}}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{10^7}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \\ &= \frac{10^7}{\sqrt{15}}\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{10^7}{\sqrt{15}}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

   D'où la relation recherchée.

2. Déterminer les variations de la fonction C_m.

   La fonction C_m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a, pour tout $n \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$C_m'(n) = -\frac{10^7}{\sqrt{15}}\frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})'}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} = -\frac{10^7}{\sqrt{15}}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} = -\frac{10^7}{2\sqrt{15}}\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{R}_+^\star$, les quantités $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$, $\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2$ et $\frac{10^7}{2\sqrt{15}}$ sont strictement positives, ainsi $C_m'(n) < 0$. Finalement, $\boxed{C_m \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

3. Comparer les réels $g'(n)$ et $C_m(n)$ pour tout $n \in \mathbb{R}_+$.

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et, pour tout $n \in \mathbb{R}_+^\star$, $g'(n) = \frac{10^7}{\sqrt{15}}\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{R}_+^\star$, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n}$, alors $\frac{1}{2\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ et enfin : $\boxed{g'(n) \geqslant C_m(n)}$. *La courbe de g' est toujours au-dessus de celle de C_m.*

4. *Pour les étudiants ayant fait la spécialité maths en terminale :*

   Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des fonctions g' et C_m. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{g'(n)}{C_m(n)} = 1$.

   Les opérations sur les limites nous donnent directement que $\lim\limits_{n \to +\infty} g'(n) = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} C_m'(n) = 0$. La limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{g'(n)}{C_m(n)}$ est donc indéterminée. Pour lever l'indétermination on factorise le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n}$, on obtient :

$$\frac{g'(n)}{C_m(n)} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Partie C : Etude du bénéfice

On suppose de plus qu'une minute de diffusion publicitaire rapporte, par les ventes engendrées, 100000 euros.
On définit le bénéfice comme la différence de la recette et du coût.

1. Montrer que la fonction B qui, au nombre de minutes de diffusion publicitaire, associe le bénéfice correspondant, en euros, s'exprime par : $B(n) = 10^5\left(n - \dfrac{100}{\sqrt{15}}\sqrt{n} - 10\right)$.

   L'énoncé donne que la recette de n minutes de diffusion vaut, en euros, $10^5 \times n$.

   D'où le bénéfice : $B(n) = 10^5 \times n - g(n) = 10^5 n - \dfrac{10^7}{\sqrt{15}}\sqrt{n} - 10^6 = 10^5\left(n - \dfrac{100}{\sqrt{15}}\sqrt{n} - 10\right)$.

2. Résoudre algébriquement les problèmes suivants (les résultats **exacts** sont attendus) :

   (a) Pour quelles durées de diffusion publicitaire l'entreprise ne perd pas d'argent ?

   Autrement dit, pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{R}_+$ le bénéfice de l'entreprise est positif ? On résout l'inéquation $B(n) \geqslant 0$ d'inconnue $n \in \mathbb{R}_+$.

   $$B(n) \geqslant 0 \iff 10^5\left(n - \frac{100}{\sqrt{15}}\sqrt{n} - 10\right) \geqslant 0 \iff n - \frac{100}{\sqrt{15}}\sqrt{n} - 10 \geqslant 0 \iff \begin{cases} X = \sqrt{n} \\ X^2 - \dfrac{100}{\sqrt{15}}X - 10 \geqslant 0 \end{cases}$$

   Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\left(-\dfrac{100}{\sqrt{15}}\right)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = -\dfrac{10^4}{15} + 40 = \dfrac{2000}{3} + 40 = \dfrac{2120}{3} > 0$. *Ces racines sont données par* $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{100}{\sqrt{15}} + \sqrt{\dfrac{2120}{3}}\right) = \dfrac{50}{\sqrt{15}} + \sqrt{\dfrac{530}{3}} > 0$ *et* $x_2 = \dfrac{50}{\sqrt{15}} - \sqrt{\dfrac{530}{3}} < 0$.
   Comme $X \geqslant 0$, on en déduit que :

   $$B(n) \geqslant 0 \iff X \geqslant x_1 \iff \sqrt{n} \geqslant x_1 \iff n \geqslant x_1^2.$$

   $$\boxed{\text{L'entreprise ne perd pas d'argent pour des durées de diffusion supérieures ou égale à } x_1^2 = \left(\frac{50}{\sqrt{15}} + \sqrt{\frac{530}{3}}\right)^2 \text{ min}}.$$

   (b) Quelles sont les pertes maximales que peut engendrer une durée de diffusion mal calibré ?

   On étudie la fonction B sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et, pour tout $n \in \mathbb{R}_+$, $B'(n) = 10^5\left(1 - \dfrac{100}{2\sqrt{15}\sqrt{n}}\right)$. *Or, pour tout $n \in \mathbb{R}_+$, on a :*

   $$B'(n) \geqslant 0 \iff 1 - \frac{100}{2\sqrt{15}\sqrt{n}} \geqslant 0 \iff \sqrt{n} \geqslant \frac{50}{\sqrt{15}} \iff n \geqslant \left(\frac{50}{\sqrt{15}}\right)^2 \quad \textit{[par stricte croissance } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{]}$$

   En fin de compte, $B'(n) \geqslant 0 \iff n \geqslant \dfrac{50^2}{15} \iff n \geqslant \dfrac{500}{3}$. *On obtient donc :*

n	0		$\frac{500}{3}$		$+\infty$
$B'(n)$	‖	$-$	0	$+$	
$B(n)$	0	↘	$B(\frac{500}{3})$	↗	$+\infty$

   Les pertes maximales sont atteintes pour une durée de $\dfrac{500}{3}$ minutes. La perte enregistrée vaudra

$$-B\left(\frac{500}{3}\right) = -10^5\left(\frac{500}{3} - \frac{100}{\sqrt{15}}\sqrt{\frac{500}{3}} - 10\right) = -10^5\left(\frac{500}{3} - 100\sqrt{\frac{500}{15 \times 3}} - 10\right) = -10^5\left(\frac{500}{3} - \frac{1000}{3} - 10\right) = \frac{530.10^5}{3}$$

Soit environ $17,667$ millions d'euros.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆