Correction du DM n°2

1) On a : $\varphi + \overline{\varphi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

et : $\varphi\overline{\varphi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4} = \dfrac{1^2-(\sqrt{5})^2}{4} = -1$

2) La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $r^2-r-1=0$, de discriminant $(-1)^2-4.1.(-1)=5>0$ et de racines : $\dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \overline{\varphi}$ et $\dfrac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times 1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\underline{\forall n\in\mathbb{N},\quad F_n = \lambda\varphi^n + \mu\overline{\varphi}^n.}$$

Déterminons λ et μ. On a :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda(\varphi - \overline{\varphi}) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\varphi-\overline{\varphi}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Donc :

$$\underline{\forall n\in\mathbb{N},\quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \overline{\varphi}^n\right)}$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^k - \overline{\varphi}^k\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{n}\varphi^k - \sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi}^k\right] \text{ [par linéarité]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\varphi^{n+1}}{1-\varphi} - \frac{1-\overline{\varphi}^{n+1}}{1-\overline{\varphi}}\right]$$

D'après la question 1), on sait que $1-\varphi = \overline{\varphi}$, $1-\overline{\varphi} = \varphi$ et $\varphi\overline{\varphi} = 1$.

On obtient donc :

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\varphi^{n+1}}{\overline{\varphi}} - \frac{1-\overline{\varphi}^{n+1}}{\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1-\varphi^{n+1})\varphi - (1-\overline{\varphi}^{n+1})\overline{\varphi}}{\overline{\varphi}\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\varphi - \varphi^{n+2} - \overline{\varphi} + \overline{\varphi}^{n+2}}{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n+2} - \overline{\varphi}^{n+2} - (\varphi - \overline{\varphi})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n+2} - \overline{\varphi}^{n+2} - \sqrt{5}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n+2} - \overline{\varphi}^{n+2}\right] - 1$$

$$= F_{n+2} - 1$$

4) Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“} L_{n+1} = F_{n+1} + 2F_n \text{”}$$

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $L_1 = 1$ et $F_1 + 2F_0 = 1 + 2.0 = 1$
  $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $L_2 = L_1 + L_0 = 1 + 2 = 3$ et $F_2 + 2F_1 = 1 + 2.1 = 3$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ et montrons $\mathcal{P}(n+2)$.

$$L_{n+3} = L_{n+2} + L_{n+1} \text{ [par définition de } (L_n)]$$

$$= F_{n+2} + 2F_{n+1} + F_{n+1} + 2F_n \text{ [par les hypothèses de récurrence]}$$

$$= F_{n+2} + F_{n+1} + 2(F_{n+1} + F_n)$$

$$= F_{n+3} + 2F_{n+2} \text{ [par définition de } (F_n)]$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Le principe de récurrence double nous assure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n

5) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"} \sum_{k=0}^{n} L_k = F_{n+3} + F_{n+1} - 1 \text{"}$$

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $\sum_{k=0}^{0} L_k = L_0 = 2$ et $F_3 + F_1 - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_k &= \sum_{k=0}^{n} L_k + L_{n+1} \\
&= F_{n+3} + F_{n+1} - 1 + L_{n+1} \quad [\text{par hypothèse de récurrence}] \\
&= F_{n+3} + F_{n+1} - 1 + F_{n+1} + 2F_n \quad [\text{par } 3)] \\
&= F_{n+3} + 2(F_{n+1} + F_n) - 1 \\
&= F_{n+3} + 2F_{n+2} - 1 \quad [\text{par définition de } (F_n)] \\
&= (F_{n+3} + F_{n+2}) + F_{n+2} - 1 \\
&= F_{n+4} + F_{n+2} - 1 \quad [\text{par définition de } (F_n)]
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Le principe de récurrence nous assure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.