# Correction DM n°2

**Exercice n°1** : 1) Soit $k \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ y + (2-3k)z = k-6 \\ y - (1+2k)z = -3 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{1}x + y + kz = 2 \\ \boxed{1}y + (2-3k)z = k-6 \\ \boxed{(k-3)}\, z = 3-k \end{cases}$$

Le système $(S_k)$ sera de Cramer ssi $k-3 \neq 0$.
Donc $(S_k)$ de Cramer ssi $k \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2) Résolution dans le cas $k=3$ :

$$(S_3) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - 7z = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10z \\ y = -3 + 7z \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de $(S_3)$ est

$$\underline{\left\{ (5-10z \,;\, -3+7z \,;\, z) \mid z \in \mathbb{R} \right\}}$$

Résolution dans le cas $k \neq 3$ :

$$(S_k) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ y + (2-3k)z = k-6 \\ (k-3)z = 3-k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 3k \\ y = -2k - 4 \\ z = \dfrac{3-k}{k-3} = -1 \end{cases}$$

Donc $(S_k)$ possède pour unique solution $\underline{(6+3k \,;\, -2k-4 \,;\, -1)}$.

## Exercice n°2 :

1) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ est défini et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{x^2-3}{2x^2}$.

Etant donné que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2-3$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On a également :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Ce ne sont pas des formes indéterminées

2) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$\mathcal{P}(n)$ : " $u_n$ bien défini et $u_n \geqslant \sqrt{3}$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai car $u_0$ bien défini par hypothèse et $u_0 = 4 \geqslant \sqrt{3}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence : $u_n$ est bien défini et $u_n \geqslant \sqrt{3}$.

En particulier $u_n \neq 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$ est bien défini.

De plus, la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{3} ; +\infty[$, ainsi, de $\sqrt{3} \leqslant u_n$, on déduit : $f(\sqrt{3}) \leqslant f(u_n)$

i.e. $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - x\right)$$

$$= \frac{3 - x^2}{2x}$$

Etant que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2x > 0$, le signe de $f(x) - x$ est le signe de $3 - x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le tableau de signe suivant :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - x$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi, on a obtenu que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{3}$ d'après la question précédente
- $\forall x \geqslant \sqrt{3}$, $f(x) \leqslant x$ d'après le tableau de signe ci-dessus.

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant u_n$, i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$. Le Théorème de la limite monotone nous assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Enfin, comme $u_0 = 4$, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} \leqslant u_n \leqslant 4$. Le Théorème de passage à la limite dans les inégalités nous assure que : $\sqrt{3} \leqslant l \leqslant 4$.

5) On sait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \geqslant \sqrt{3}$.

Ainsi, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, par opérations sur les limites, $\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{3}{\ell}\right)$. Donc, par passage à la limite dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$ on obtient : $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{3}{\ell}\right) = f(\ell)$. Autrement dit, $\ell$ est un point fixe de $f$. Or la question 3) nous assure que $\sqrt{3}$ est l'unique point fixe de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On conclut que $\ell = \sqrt{3}$.

## Exercice n°3 :

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :
$\mathcal{P}(n)$ : " $u_n$ est bien défini et $u_n \geqslant 1$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $u_0$ bien défini par hypothèse et $u_0 = 1 \geqslant 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence : $u_n$ est bien défini et $u_n \geqslant 1$.
En particulier, $u_n \neq 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ est bien défini.
De plus, comme $u_n \geqslant 1$, $\frac{1}{u_n} > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > u_n \geqslant 1$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0 \quad \text{par la question précédente.}$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 \\ &= u_k^2 + 2u_k\frac{1}{u_k} + \left(\frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 \\ &= 2 + \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Par la question précédente, pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a : $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 - \frac{1}{u_k^2}$.

En sommant ces $n$ égalités, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 - \frac{1}{u_k^2}\right).$$

On reconnaît dans le membre de gauche une somme télescopique, ce qui nous donne, en utilisant la linéarité à droite :

$$u_n^2 - u_0^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

d'où $u_n^2 - 1 = 2n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, les termes $\frac{1}{u_k^2}$ sont strictement positifs, ainsi il en est de même de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

Donc, comme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} > 0$, on a : $2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} > 2n$

et donc : $u_n^2 - 1 > 2n$.

Conclusion : $u_n^2 > 2n+1$, et $u_n > \sqrt{2n+1}$.

Comme $\sqrt{2n+1} \longrightarrow +\infty$, le Théorème de minoration nous assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède pour limite $+\infty$.

6) Etant donné que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (croissante), le Théorème de la limite monotone nous assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite (finie ou infinie).

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$, on a nécessairement $l \geq 1$. En passant à la limite dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, on obtient :

$l = l + \frac{1}{l}$ ie $0 = \frac{1}{l}$ ce qui implique que $0 = 1$.

Cette dernière égalité est une absurdité. Donc la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être finie, elle est nécessairement infinie.

Enfin, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.