Exercices de révisions (Vacances de la Toussaint)

Exercice n°2 :

1) Le polynôme P a pour racine évidente -1. Par division euclidienne, on obtient

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+7x^3-3x^2-3x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} x^3-3x^2-3x+1 & 6x^3+x^2-4x+1 \\ -4x^2-3x+1 & \\ x+1 & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+1)(6x^3+x^2-4x+1)$

On remarque que -1 est également racine de $6x^3+x^2-4x+1$, de même on obtient :

$$\begin{array}{r|l} 6x^3+x^2-4x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -5x^2-4x+1 & 6x^2-5x+1 \\ x+1 & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+1)^2(6x^2-5x+1)$

Enfin, le discriminant de $6x^2-5x+1$ est $(-5)^2-4\times6\times1 = 1 > 0$, ses racines sont : $\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times6} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times6} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) = 6(x+1)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

2) De la question précédente, on déduit le tableau de signe de $P(x)$ suivant :

x	$-\infty$		-1		$1/3$		$1/2$		$+\infty$
$6(x+1)^2$		+	0	+		+		+	
$x-\frac{1}{3}$		−		−	0	+		+	
$x-\frac{1}{2}$		−		−		−	0	+	
$P(x)$		+	0	+	0	−	0	+	

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) > 0 \iff x \in \,]-\infty; -1[\, \cup \,]-1; 1/3[\, \cup \,]1/2; +\infty[$.

3) L'ensemble de définition de cette inéquation est $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$6(\ln x)^4 + 7(\ln x)^3 + 1 \leq 3(\ln x)^2 + 3(\ln x) \iff P(\ln x) \leq 0.$$

En utilisant le résultat de la question 1), on a :

$$P(\ln x) = 6(\ln x + 1)^2 \left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\left(\ln x - \frac{1}{3}\right).$$

On en déduit le tableau de signe de $P(\ln x)$:

x	0		e^{-1}		$e^{1/3}$		$e^{1/2}$		$+\infty$
$6(\ln x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$\ln x - \frac{1}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x - \frac{1}{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(\ln x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(\ln x) \leq 0 \iff x \in \left[e^{1/3} ; e^{1/2}\right]$.

Exercice n°3 :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x \in D_g \iff x + 1 > 0 \iff x > -1$.

Donc : $D_g =]-1 ; +\infty[$.

b) On a, pour tout $x \in D_g$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$.

c) Etant donné que : $\forall x \in D_g$, $x + 1 > 0$, le signe de $g'(x)$ est le signe de x.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

• $g(0) = 0$ • g possède un minimum global qui est 0 atteint en 0.

Donc : $\forall x \in D_g$, $g(x) \geq 0$ et $\forall x \in D_g \setminus \{0\}, g(x) > 0$

ie g est positive et strictement positive sur $D_g \setminus \{0\}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x+1>0 \\ \text{et} \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ \text{et} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Donc $\underline{D_f =]-1;0[\cup]0;+\infty[}$.

3) On a, pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{((x+1)\ln(x+1))'x - ((x+1)\ln(x+1))(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{((x+1)'\ln(x+1) + (x+1)(\ln(x+1))')x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{(\ln(x+1) + 1)x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

4) Etant donné que, pour tout $x \in D_f$, $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$. Donc, par 1)c) : $\underline{\forall x \in D_f,\ f'(x) > 0}$.

5) On en déduit le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
f	‖	↗	‖	↗	

6)
```
import math as m
def f(x):
    if x>-1 and x!=0:
        return((x+1)*m.log(x+1)/x)
    else:
        print(x,"n'appartient pas à Df")
```

<u>Rem.</u> : `x!=0` pour $x \neq 0$

<u>Exercice n°4</u> :

a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}}$ est arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_1 = 1$. Donc : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ u_n = u_1 + (-2)(n-1) = 3-2n}$.

b) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- On considère $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = 6 - \frac{1}{2}\ell$ ie $\ell = 4$.
- La suite $(v_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $v_0 - \ell = -3$ et de raison $-\frac{1}{2}$, en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - \ell = 6 - \frac{1}{2}v_n - 4$$
$$= 2 - \frac{1}{2}v_n$$
$$= -\frac{1}{2}(v_n - 4)$$
$$= -\frac{1}{2}(v_n - \ell)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - \ell = (v_0 - \ell)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

- En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ell - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 4 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

2) $$\sum_{i=3}^{n+1} u_i = \frac{(n+1-3+1)(u_3 + u_{n+1})}{2} = \frac{(n-1)(-3+3-2(n+1))}{2}$$
$$= -(n-1)(n+1) = 1 - n^2$$

$$\sum_{j=3}^{n+1} v_j = \sum_{j=3}^{n+1}\left(4 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^j\right) = \sum_{j=3}^{n+1} 4 - 3\sum_{j=3}^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^j \quad [\text{par linéarité}]$$
$$= 4(n-1) - 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= 4n - 4 + \frac{3}{2^3}\times\frac{2}{3}\times\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$
$$= 4n - 4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= 4n - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{15}{4}.$$