ECG1

$\boxed{\textbf{DM n}^\circ\textbf{2 à rendre le lundi } 6 \textbf{ novembre } 2023}$

Pour toute question sur le DM (précisions, aide, demande de correction...), me contacter par mail.

On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On notera $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ce nombre est appelé le « nombre d'or ») et $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que $\varphi + \overline{\varphi} = 1$, puis que $\varphi\overline{\varphi} = -1$
2. Sans raisonner par récurrence, justifier qu'une expression explicite de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \overline{\varphi}^n\right).$$
3. En utilisant le résultat de la question précédente et sans raisonner par récurrence, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

4. En utilisant un raisonnement par récurrence double, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = F_{n+1} + 2F_n.$$
5. En utilisant un raisonnement par récurrence simple, déduire de la question précédente que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} L_k = F_{n+3} + F_{n+1} - 1.$$

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆