Devoir maison n°3, à rendre le vendredi 24 novembre 2021

Héron d'Alexandrie : mathématicien grec du Ier, IIème siècle après J.-C.

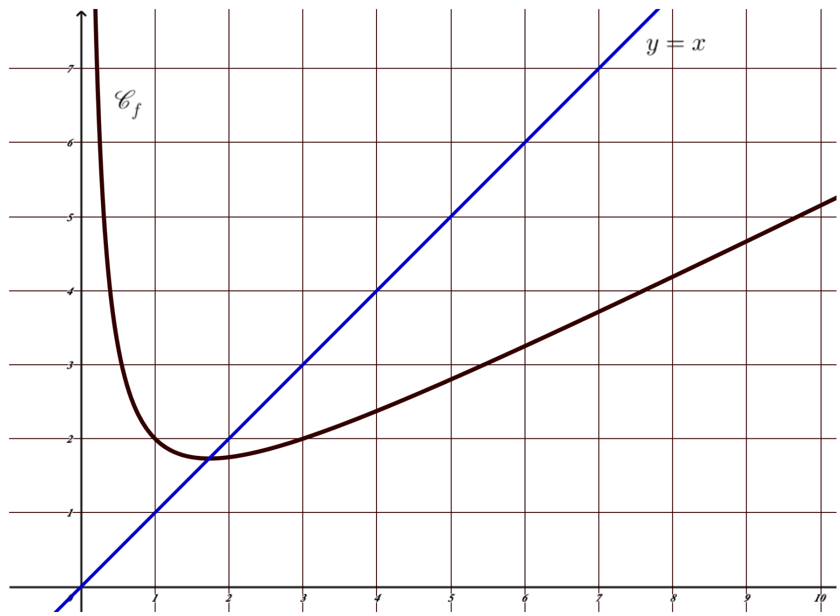
Exercice obligatoire : Méthode de Héron pour approcher $\sqrt{3}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right).$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$. *On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.*

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Représenter les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin de conjecturer ses variations.



3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > \sqrt{3}$.
4. Dans cette question, on cherche à justifier la conjecture réalisée à la question 2. sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par deux méthodes distinctes :
   (i) **Méthode n°1 :** Démontrer la conjecture en raisonnant par récurrence.
   (ii) **Méthode n°2 :** Etudier sur $\mathbb{R}_+^\star$ le signe de $f(x) - x$. En déduire de nouveau une justification de votre conjecture.
5. A partir de cette question, on suppose que $u_0 = 2$ et on admet que les propriétés conjecturées à la question 2. pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste vraies dans ce cas. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{3}$. Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}.$$

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n^2$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{2^n}}$.
7. En déduire une valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle $0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant 10^{-10}$.
8. **Avec Python :**
   (a) Ecrire une fonction Python `suite_u(n)` qui prend en argument un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de u_n.
   (b) A l'aide de la fonction `suite_u(n)`, écrire un script Python qui affiche la première valeur de n pour laquelle $0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant 10^{-10}$.

Exercice facultatif : Problème d'isopérimétrie pour le triangle et formule de Héron

Question : « *Parmi tous les triangles ayant un périmètre donné, quels sont ceux qui ont la plus grande aire ? Quelle est cette aire ?* »

1. **Démonstration d'une inégalité arithmético-géométrique**

   (a) Montrer que : $\forall y \in [0,1], \quad y(1-y)^2 \leqslant \dfrac{4}{27}$.
   Dans quel cas y a-t-il égalité ? Préciser la valeur de y dans ce cas.

   (b) Soit $y \in [0,1]$. Montrer que : $\forall x \in [0, 1-y], \quad -yx^2 + y(1-y)x \leqslant \dfrac{y(1-y)^2}{4}$.
   Dans quel cas y a-t-il égalité ? Préciser la valeur de x dans ce cas.

   (c) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ tels que $x + y + z = 1$. Montrer que $xyz \leqslant \dfrac{1}{27}$.
   Justifier soigneusement qu'il y a égalité dans un unique cas. Préciser les valeurs de x, y et z dans ce cas.

   (d) En déduire l'*inégalité arithmético-géométrique* suivante :

   $$\forall u, v, w \in \mathbb{R}_+, \quad uvw \leqslant \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3.$$

   Montrer également que $uvw = \left(\dfrac{u+v+w}{3}\right)^3$ si et seulement si $u = v = w$.

   Remarque : De façon générale, on peut démontrer le résultat suivant

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}_+, \quad \prod_{k=1}^{n} u_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^n.$$

2. **Résolution du problème d'isopérimétrie du triangle**

   Soit $p > 0$ un réel. On cherche à déterminer les triangles de côtés $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + b + c = 2p$ qui sont d'aire maximale et de déterminer la valeur de cette aire. La valeur $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ est appelée le demi-périmètre du triangle.
   Pour cela :

   - on admet que $p - a \geqslant 0$, $p - b \geqslant 0$, $p - c \geqslant 0$;
   - on admet que l'aire $\mathscr{A}$ d'un triangle de côté a, b et c est donné par la *Formule de Héron* :

   $$\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

   On notera $u = p - a$, $v = p - b$ et $w = p - c$.

   (a) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique et le cas d'égalité associé, obtenue à la question 1.(d), déterminer :
   - la valeur maximale de $\mathscr{A}$;
   - préciser les valeurs de a, b, c pour lesquelles cette valeur est atteinte.

   (b) Quels sont les triangles de périmètre donné ayant une aire maximale ?

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆