Devoir libre n°3, à rendre le 4 janvier 2021

Exercice n°1 (Méthode de Héron pour l'approximation de $\sqrt{2}$)

On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. **Convergence de la suite** (u_n)
   (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle est minorée par $\sqrt{2}$.
   (b) Prouver par récurrence que (u_n) est strictement décroissante.
   (c) En déduire que (u_n) est convergente. Justifier soigneusement que sa limite est $\sqrt{2}$.
2. **Vitesse de convergence de la suite** (u_n) **vers** $\sqrt{2}$

   On propose ici une autre approche permettant de montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.
   Cette nouvelle approche nous permettra également d'estimer la vitesse à laquelle cette convergence s'effectue.

   (a) A l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, calculer les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et donner pour chacun le nombre de décimales exactes communes avec $\sqrt{2}$.
   Comment ce nombre de décimales évolue à chaque itération ?

   Ce phénomène est typique d'une convergence à vitesse $\boxed{\textit{hypergéométrique}}$ *(voir ci-dessous).*
   Dans la suite, on estime l'erreur $|u_n - \sqrt{2}|$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2u_n} \times (u_n - \sqrt{2})^2$.

   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant (2\sqrt{2})\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^n}$, puis que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

   <u>*Définition :*</u> *On dit que la convergence de (u_n) vers un réel ℓ est à vitesse* $\boxed{\textit{hypergéométrique}}$ *lorsque, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a : $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant Ck^{2^n}$ avec $0 < k < 1$ et C une constante positive (qui sont C, k et ℓ dans notre cas ?).*

   (d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Résoudre l'inéquation $\quad (2\sqrt{2})\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^x} \leqslant \varepsilon \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

   (e) Combien de termes de la suite suffit-il de calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

Exercice facultatif (Une autre approximation de $\sqrt{2}$ par les fractions continues)

1. Montrer que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

On peut alors écrire : $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$ $\quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$ $\quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}$

Ce procédé itératif suggère l'écriture « infinie » $\quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}$

Pour formaliser cette écriture, on va poser $\left\{ \begin{array}{llll} f : &]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 + \dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$

et introduire la suite (u_n) définie par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

2. **Convergence de la suite** (u_n)
   (a) Justifier que (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Exprimer, à l'aide de f, u_{2n+2} en fonction de u_{2n}.
   (c) En déduire, par récurrence, que la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.
   (d) Justifier soigneusement que (u_{2n}) converge vers $\sqrt{2}$.
   (e) En déduire que (u_{2n+1}) converge vers $\sqrt{2}$.
   (f) Conclure quant à la convergence de (u_n).

3. **Vitesse de convergence de la suite** (u_n) **vers** $\sqrt{2}$

   Comme dans l'exercice précédent, on propose ici une autre approche permettant de montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$. Cette nouvelle approche nous permettra également d'estimer la vitesse à laquelle cette convergence s'effectue.

   (a) A l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, calculer les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 et donner pour chacun le nombre de décimales exactes communes avec $\sqrt{2}$.
   Comment ce nombre de décimales évolue à chaque itération ?

   Ce phénomène est typique d'une convergence à vitesse $\boxed{\text{géométrique}}$ (voir ci-dessous).
   Dans la suite, estime l'erreur $|u_n - \sqrt{2}|$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n} \times (u_n - \sqrt{2})$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant |1-\sqrt{2}| \left| \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \right|^n$, puis que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

   __Définition :__ On dit que la convergence de (u_n) vers une réel ℓ est à vitesse $\boxed{\text{géométrique}}$ lorsque, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a : $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant Ck^n$ avec $0 < k < 1$ et C une constante positive (qui sont C, k et ℓ dans notre cas ?).

   (d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Résoudre l'inéquation $|1-\sqrt{2}| \left| \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \right|^x \leqslant \varepsilon$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^\star$.
   (e) Combien de termes de la suite suffit-il de calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?
   Comparer avec les résultats obtenus à l'exercice précédent et conclure.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆