ECG1

Devoir maison n°3

Exercice n°1 : Entrainement sur les polynômes et résolution d'inéquation

On considère le polynôme P définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

1. Factoriser le polynôme P en l'écrivant comme un produit de polynômes de degré un.
2. A l'aide de la question précédente, résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\quad 6e^{3x} + 7e^{2x} - 3e^{x} - 3 + e^{-x} \leqslant 0$.

Exercice n°2 : Entrainement sur les fonctions

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

Objectif : Dresser le tableau de variation de la fonction f.

1. Question préliminaire : On considère la fonction g définie par $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de g.

   On admettra que g est dérivable sur $\mathscr{D}_g$

   (b) Calculer, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g'(x)$.

   (c) Dresser le tableau de variation de g (sans les limites). En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathscr{D}_g$.
2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

On admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$

3. Calculer, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x)$.
4. Déduire de la question 1.(c) le signe de $f'(x)$ sur $\mathscr{D}_f$.
5. En déduire le tableau de variation de f (sans les limites).
6. Python : Ecrire une fonction Python f prenant pour argument x et qui renvoie la valeur de $f(x)$ si $x \in \mathscr{D}_f$ et la chaîne de caractère : "x n'appartient pas à $\mathscr{D}_f$" lorsque $x \notin \mathscr{D}_f$.

Exercice n°3 : Entrainement sur les suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $\quad u_0 = 2,\ v_0 = 1 \quad$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$

1. Calculer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2.
2. Python : Soit $n \in \mathbb{N}$. Compléter le programme python suivant afin qu'il affiche les termes u_n et v_n.

```
u=2
v=1
for k in range(.....):
      u1=.....
      v1=.....
      u=u1
      v=v1
print(u,v)
```

Objectif : déterminer de deux façons différentes les expressions explicites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode 1 : Avec deux suites auxiliaires

3. On définit les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

   (b) En déduire les expressions explicites de t_n et s_n.

   (c) En déduire les expressions explicites de u_n et v_n

Méthode 2 : en utilisant le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.
5. En déduire l'expression explicite de u_n puis de v_n. Retrouver les résultats obtenus à la question 2.(c)

Calcul d'une somme

6. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$, c'est-à-dire la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Exercice n°4 : Entrainement sur les calculs de sommes arithmétiques et géométriques

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par $u_k = 5 + 3k$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S_2 = \sum_{k=4}^{n+8} u_k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$. Calculer la somme : $S_3 = \sum_{k=2}^{n} 5^k \dfrac{2}{3^{k+1}}$

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆