Correction DM n°3

Exercice n°1 :

1) On remarque que -1 est racine évidente de P.
Réalisons la division euclidienne de P par $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+7x^3-3x^2-3x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} x^3-3x^2-3x+1 & 6x^3+x^2-4x+1 \\ -4x^2-3x+1 & \\ x+1 & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+1)(6x^3+x^2-4x+1)$.
On remarque de nouveau que -1 est racine évidente de $6x^3+x^2-4x+1$.
Réalisons la division euclidienne de $6x^3+x^2-4x+1$ par $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3+x^2-4x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -5x^2-4x+1 & 6x^2-5x+1 \\ x+1 & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+1)(x+1)(6x^2-5x+1)$
Enfin, le trinôme $6x^2-5x+1$ a pour discriminant $(-5)^2-4.6.1 = 1$ qui est strictement positif. Ses racines sont $\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2.6} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2.6} = \dfrac{1}{2}$
et on a la factorisation : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 6x^2-5x+1 = 6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$= (3x-1)(2x-1)$

Conclusion : La factorisation de P recherchée est la suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+1)^2(3x-1)(2x-1)$$

2) L'ensemble de définition de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$6e^{3x} + 7e^{2x} - 3e^{x} - 3 + e^{-x} \leqslant 0 \iff 6e^{4x} + 7e^{3x} - 3e^{2x} - 3e^{x} + 1 \leqslant 0$

[par multiplication par $e^{x} > 0$]

$\iff 6(e^{x})^4 + 7(e^{x})^3 - 3(e^{x})^2 - 3e^{x} + 1 \leqslant 0$

$\iff \begin{cases} X = e^{x} \\ 6X^4 + 7X^3 - 3X^2 - 3X + 1 \leqslant 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} X = e^{x} \\ (X+1)^2(3X-1)(2X-1) \leqslant 0 \end{cases}$

[par la question précédente]

$\iff (e^{x}+1)^2(3e^{x}-1)(2e^{x}-1) \leqslant 0$

$\iff (3e^{x}-1)(2e^{x}-1) \leqslant 0$

[car $(e^{x}+1)^2 > 0$]

Résoudre l'inéquation revient donc à déterminer le signe de $(3e^{x}-1)(2e^{x}-1)$.
Le tableau de signe de cette expression est donné par :

x	$-\infty$		$-\ln 3$		$-\ln 2$		$+\infty$
$3e^{x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2e^{x}-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3e^{x}-1) \times (2e^{x}-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En effet :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ 3e^{x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{x} \geqslant \frac{1}{3} \iff x \geqslant -\ln 3$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ 2e^{x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{x} \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant -\ln 2$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-\ln 3 ; -\ln 2]$

Exercice n°2 :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x \in \mathcal{D}_g \iff x+1 > 0 \iff x > -1$.

Donc : $\mathcal{D}_g =]-1 ; +\infty[$.

b) On a, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$.

c) Etant donné que : $\forall x \in \mathcal{D}_g,\ x+1 > 0$, le signe de $g'(x)$ est le signe de x. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- $g(0) = 0$
- La fonction g possède un minimum global qui est 0 atteint en 0.

En particulier : $\underline{\forall x \in \mathcal{D}_g,\ g(x) \geqslant 0}$. Autrement dit, <u>la fonction g est positive</u>.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} x+1 > 0 \\ \text{et} \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ \text{et} \\ x \neq 0 \end{cases}$

Donc $\underline{\mathcal{D}_f =]-1;0[\cup]0;+\infty[}$.

3) On a, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{((x+1)\ln(x+1))'x - ((x+1)\ln(x+1))(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{((x+1)'\ln(x+1) + (x+1)(\ln(x+1))')x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{(\ln(x+1)+1)x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

4) Etant donné que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$. Donc : $\underline{\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) \geqslant 0}$.

5) On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
f		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

6)

```
import math as m
def f(x) :
    if x>-1 and x!=0 :
        return ((x+1)*m.log(x+1))/x
    else :
        return "x n'appartient pas à Df"
```

Rem. : x!=0 pour $x \neq 0$

Exercice n°3 :

1) $u_1 = \frac{1}{3}(2u_0 + v_0) = \frac{1}{3}(2.2+1) = \frac{5}{3}$

$v_1 = \frac{1}{3}(u_0 + 2v_0) = \frac{1}{3}(2 + 2.1) = \frac{4}{3}$

$u_2 = \frac{1}{3}(2u_1 + v_1) = \frac{1}{3}\left(2.\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{14}{9}$

$v_2 = \frac{1}{3}(u_1 + 2v_1) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3} + 2.\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{9}$

2)

```
u = 2
v = 1
for k in range(n) :
    u1 = 1/3 (2u + v)
    v1 = 1/3 (u + 2v)
    u = u1
    v = v1
print(u, v)
```

3) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$t_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

$$= \frac{1}{3}(u_n - v_n)$$

$$= \frac{1}{3} t_n$$

Donc (t_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $t_0 = u_0 - v_0 = 2-1 = 1$.

et, on a :

$$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) + \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = u_n + v_n = s_n$$

Donc (s_n) est constante.

b) D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_n = t_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 . \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} \qquad s_n = s_0 = u_0 + v_0 = 3$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{cases} t_n = u_n - v_n \\ s_n = u_n + v_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_n = t_n + v_n \\ s_n = (t_n + v_n) + v_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_n = t_n + v_n \\ v_n = \dfrac{s_n - t_n}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u_n = \dfrac{s_n + t_n}{2} \\ v_n = \dfrac{s_n - t_n}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ u_n = \dfrac{3 + \frac{1}{3^n}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ \bullet\ v_n = \dfrac{3 - \frac{1}{3^n}}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{array}}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{3}(2u_{n+1} + v_{n+1}) \\ &= \frac{1}{3}\left(2u_{n+1} + \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)\right) \\ &= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{9}v_n \\ &= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{9}(3u_{n+1} - 2u_n) \end{aligned}$$

$\left[\text{car } u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \iff v_n = 3u_{n+1} - 2u_n\right]$

$$= \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

Autrement dit :

$$3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$$

5) L'équation caractéristique associée à (u_n) est :

$$(E_c) \ : \ 3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Le discriminant associé vaut $(-4)^2 - 4.3.1 = 4 > 0$ et les solutions de (E_c) sont : $\frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2.3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2.3} = 1$.

On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda . 1^n + \mu \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lambda + \mu \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

De plus :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = \frac{5}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + \frac{\mu}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 - \mu \\ (2-\mu) + \frac{\mu}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 2 - \mu \\ \frac{2}{3}\mu = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3u_{n+1} - 2u_n$

$$= 3\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - 2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$= 3.\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2.\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

On retrouve bien les résultats de la question 2)(c)

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^1\right) + \dots + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{3}{2}\right)}_{(n+1) \text{ termes}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}_{\text{somme géométrique}}$$

$$= (n+1) \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3(n+1)}{2} + \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Exercice n° 4 :

1) La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
En appliquant la formule du cours, on trouve :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} = \frac{(n+1)(5 + 5 + 3n)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(10 + 3n)}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=4}^{n+8} u_k = \frac{((n+8) - 4 + 1)(u_4 + u_{n+8})}{2}$$

$$= \frac{(n+5)(5 + 3.4 + 5 + 3(n+8))}{2}$$

$$= \frac{(n+5)(46 + 3n)}{2}$$

2) On remarque tout d'abord que la suite $\left(5^k \dfrac{2}{3^{k+1}}\right)_{k\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\dfrac{5}{3}$.

En effet, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $5^k \dfrac{2}{3^{k+1}} > 0$ et :

$$\frac{5^{k+1}\cdot\dfrac{2}{3^{k+2}}}{5^k\cdot\dfrac{2}{3^{k+1}}} = \frac{5^{k+1}}{5^k}\cdot\frac{2}{3^{k+2}}\cdot\frac{3^{k+1}}{2} = \frac{5}{3}.$$

La somme S_3 est donc géométrique. En appliquant la formule du cours, on trouve :

$$S_3 = \sum_{k=2}^{n} 5^k \frac{2}{3^{k+1}} = 5^2\cdot\frac{2}{3^{2+1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n-2+1}}{1-\frac{5}{3}}$$

$$= 5^2\cdot\frac{2}{3^{2+1}}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{25}{9}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}-1\right)$$