Correction DM n°3

Exercice n°1 :

1) $A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -10 & 15 \\ -5 & 11 & -15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi $A^2 - 5A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = -4 I_3$.

Donc $\underline{A^2 - 5A + 4I_3 = 0_3}$.

2) Un polynôme annulateur de A est donc donné par $\underline{P = X^2 - 5X + 4}$.

3) Comme $A^2 - 5A = -4I_3$, on a : $A(A - 5I_3) = -4I_3$

ou encore : $A\left(-\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I_3\right) = I_3$.

Il existe donc une matrice $B = -\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I_3$ telle que $AB = I_3$. On en déduit que A est inversible et que $B = A^{-1}$.

Conclusion : $\underline{A^{-1} = -\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$

Exercice n°2 :

1) (a)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0,3,100)
y = (-x**2 +3*x) / (x+4)
plt.plot(x,y, label="fonction f")
plt.title("Représentation de la fonction f sur [0;3]")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

b)
```
n= int(input("Donner un entier naturel"))
u=2
for i in range(1,n+1):
    u=(-u**2+3*u)/(u+4)
print(u)
```

c)
```
eps = float(input("Donner un réel strictement positif"))
u = 2
i = 0
while abs(u)>eps :
    u=(-u**2+3*u)/(u+4)
    i = i+1
print(u,i)
```

2) a)
```
def suite(n):
    u=0
    for i in range(1,n+1)
        u=u+1/i
    return u
```

b)
```
A = float(input("Donner un réel strictement positif"))
u=0
i=0
while A>u :
    i=i+1
    u=u+1/i
print(u,i)
```

Problème :

1) $X_0 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $X_1 = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$AX_n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$$

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $X_n = A^n X_0$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
  D'après 2°/a), $X_{n+1} = AX_n$ et par hypothèse de récurrence $X_n = A^n X_0$ donc $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y + 4z = a \\ x + 2y + 4z = b \\ x + 4y = c \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \begin{cases} x + y + 4z = a \\ y = b-a \\ -3y - 4z = c-a \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\iff} \begin{cases} x + y + 4z = a \\ y = b-a \\ -4z = 2a - 3b + c \end{cases}$$

Il y a 3 pivots non nuls, le système est de Cramer et P est inversible

$$\iff \begin{cases} x = 4a - 4b + c \\ y = -a + b \\ z = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b - \frac{1}{4}c \end{cases}$$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$.

b) Un calcul direct montre que $P^{-1}AP = T$ est vrai.
On en déduit que $A = PTP^{-1}$ (multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1}).

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$A^n = PT^nP^{-1}$"

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$
  et $A^0 = I_3$, donc $A^0 = PT^0P^{-1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$A^{n+1} = A \times A^n$ or $A^n = PT^nP^{-1}$ par hypothèse de récurr.
et $A = PTP^{-1}$, donc :

$$A^{n+1} = (PTP^{-1})(PT^nP^{-1}) = PT\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}T^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) a) $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_3$, $N^3 = N \times O_3 = O_3$.

Par récurrence immédiate, $N^k = O_3$ pour tout $k \geq 2$.

b) Un calcul direct montre que D et N commutent, ie $DN = ND$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ la propriété

$\mathcal{P}(n)$: " $T^n = D^n + n N D^{n-1}$ "

- $\mathcal{P}(1)$ vrai car $D + 1.ND^0 = D + NI_3 = D + N = T$.
  (remarquez que $N = T - D \Longleftrightarrow T = D + N$)

- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ vrai et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$T^{n+1} = T.T^n$ or $T = D + N$ et $T^n = D^n + nND^{n-1}$ par hypothèse de récurrence, donc :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= (D+N)(D^n + nND^{n-1}) \\ &= DD^n + D(nND^{n-1}) + ND^n + N(nND^{n-1}) \\ &= D^{n+1} + nDND^{n-1} + ND^n + nN^2D^{n-1} \end{aligned}$$

De plus $DN = ND$ et $N^2 = O_3$ (par 4°/a)), on en déduit que :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= D^{n+1} + nNDD^{n-1} + ND^n + nO_3D^{n-1} \\ &= D^{n+1} + nND^n + ND^n \\ &= D^{n+1} + (n+1)ND^n \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

- Le principe de récurrence nous assure que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Par la question précédente :

$T^n = D^n + nND^{n-1}$ et comme D diagonale : $D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{bmatrix}$

d'où : $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{n}{2^{n-1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{n}{2^{n-1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour $n = 0$: $\left(\frac{1}{2}\right)^0 \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 = T^0.$

Cette formule est donc valide dans le cas $n = 0$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par les questions 3°/a)b) et 4°/c), on a :

$$A^n = P T^n P^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^{n+2} - n - 3 & -2^{n+2} + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 2^{n+2} - 2n - 4 & -2^{n+2} + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 2^{n+2} - 4n - 4 & 2^{n+2} + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{bmatrix}$$

5°/ Par la question 2°/b), pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ ie

$\begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ donc, par la question précédente :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2^{n+2} - 4n - 4\right) = 4\left(1 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right)$$

6°/ Par croissances comparées $\frac{n}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4$.