ECG

Devoir maison n°3, à rendre le vendredi 24 novembre 2021

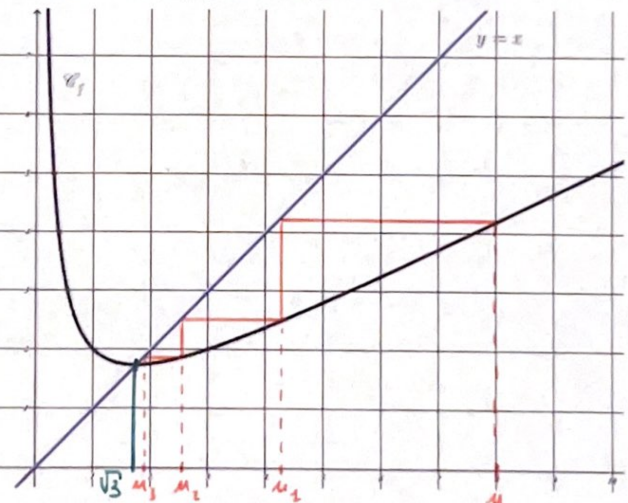
Etude de la suite de Héron

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right).$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$. *On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*

1. **Avec Python :**
   (a) Ecrire une fonction Python f qui prend pour argument x et qui renvoie la valeur $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et la chaîne de caractères : "x n'est pas strictement positif" lorsque $x \notin \mathbb{R}_+^*$.
   (b) A l'aide de la fonction f précédente, écrire une fonction Python u qui demande un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de u_n.
   (c) Calculer quelques valeurs successives de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vers quelle valeur semble se "rapprocher" $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. **Etude de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:**
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Représenter les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin de conjecturer ses variations.



   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > \sqrt{3}$.
   (d) Dans cette question, on cherche à justifier la conjecture réalisée à la question 2.(b) sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par deux méthodes distinctes :
      (i) **Méthode n°1 :** Démontrer la conjecture en raisonnant par récurrence.
      (ii) **Méthode n°2 :** Etudier sur $\mathbb{R}_+^*$ le signe de $f(x) - x$. En déduire de nouveau une justification de votre conjecture.
   (e) A partir de cette question, on suppose que $u_0 = 2$ et on admet que les propriétés conjecturées à la question 2.(b) pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste vraies dans ce cas. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{3}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}.$$

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n^2$.
   (f) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{2^n}}$.
   (g) En déduire une valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle $0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant 10^{-10}$.

$\cdots$ **Fin du sujet** $\cdots$

Correction DM n°3

1) (a)

```python
def f(x):
    if x>0:
        return (1/2)*(x+3/x)
    else:
        print(x,"n'est pas strictement positif")
```

(b)

```python
def u():
    n = int(input('Donnez un entier positif'))
    u0 = 8
    for k in range(1,n+1):
        u0= f(u0)
    return u0
```

(c) Les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semblent se rapprocher d'une valeur "proche" de 1,732 ($\sqrt{3}$ en fait).

2) (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \frac{3}{x^2} \iff x^2 \geqslant 3$$

$$\iff x \in [\sqrt{3}\,;+\infty[.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
- $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)$$

$$= \sqrt{3}$$

b) Voir Graphique. La suite (u_n) semble strictement décroissante.

c) <u>Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: " u_n bien défini et $u_n > \sqrt{3}$ "</u>

- $P(0)$ vraie car $u_0 = 8$ donc u_0 bien défini par hypothèse et $u_0 > \sqrt{3}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence u_n bien défini et $u_n > \sqrt{3}$.

  En particulier $u_n > 0$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ est bien défini.

  D'autre part, par stricte croissance de f sur l'intervalle $[\sqrt{3}; +\infty[$ (voir question 2) a)), on a : $f(u_n) > f(\sqrt{3})$ (avec $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$) ie $u_{n+1} > \sqrt{3}$.

  Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) (i) <u>Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: " $u_{n+1} < u_n$ "</u>

- $P(0)$ vraie car $u_0 = 8$ et $u_1 = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{3}{8}\right) = \frac{67}{16} < \frac{128}{16} = u_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence $u_{n+1} < u_n$ et par la question 2) c), on sait que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \in [\sqrt{3}; +\infty[$, donc $u_n, u_{n+1} \in [\sqrt{3}; +\infty[$.

  Etant donné que f est strictement croissante sur $[\sqrt{3}; +\infty[$, on a :

  $$f(u_{n+1}) < f(u_n) \quad \text{ie} \quad u_{n+2} < u_{n+1}.$$

  Donc $P(n+1)$ vraie.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) - x = \frac{3 - x^2}{2x}$.

Le signe de $f(x) - x$ est le signe de $3 - x^2$ car $2x > 0$.

On obtient :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$	

$f(x) - x$ s'annule exclusivement en $x = \sqrt{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in]\sqrt{3}; +\infty[$, on a : $f(u_n) - u_n < 0$ ie $f(u_n) < u_n$, ou encore $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\underline{\dfrac{v_n^2}{2u_n} = \dfrac{(u_n - \sqrt{3})^2}{2u_n}} = \dfrac{u_n^2 - 2\sqrt{3}u_n + 3}{2u_n}$

$$= \frac{u_n^2}{2u_n} + \frac{3}{2u_n} - \frac{2\sqrt{3}u_n}{2u_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) - \sqrt{3}$$

$$= u_{n+1} - \sqrt{3}$$

$$= v_{n+1}$$

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k > \sqrt{3}$. En particulier : $u_n \geqslant \frac{1}{2}$ et $2u_n \geqslant 1$. Ainsi $\dfrac{1}{2u_n} \leqslant 1$ et $\underline{v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n} \leqslant v_n^2}$.

f) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: " $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{2^n}}$ " :

- $P(0)$ vraie car $v_0 = 2 - \sqrt{3} \in [0{,}3 ; 0{,}4]$, ainsi $0 \leqslant v_0 \leqslant \dfrac{1}{2^{2^0}} = \dfrac{1}{2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{2^n}}$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que : $0^2 \leqslant v_n^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)^2$.
  On sait par la question e) que $v_{n+1} \leqslant v_n^2$, ainsi par transitivité :
  $v_{n+1} \leqslant v_n^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)^2 = \dfrac{1}{2^{2^n \times 2}} = \dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}$. D'autre part, on sait par 2)c) que $u_{n+1} \geqslant \sqrt{3}$ ie $v_{n+1} \geqslant 0$. Donc $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}$ et $P(n+1)$ est vraie
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g) Cherchons $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^{2^n}} \leqslant 10^{-10}$. On a :

$$\frac{1}{2^{2^n}} \leqslant \frac{1}{10^{10}} \iff 2^{2^n} \geqslant 10^{10} \iff 2^n \geqslant \frac{10 \ln(10)}{\ln(2)}$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10\ln(10)}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)} \qquad \left[\frac{10 \ln 10}{\ln(2)} > 0\right]$$

On peut choisir $n = \left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{10\ln(10)}{\ln 2}\right)}{\ln 2} \right\rceil = 6$.

Par la question f), on a bien : $0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant \dfrac{1}{2^{2^n}} \leqslant 10^{-10}$.