Devoir maison n°3, à rendre le vendredi 24 novembre 2021

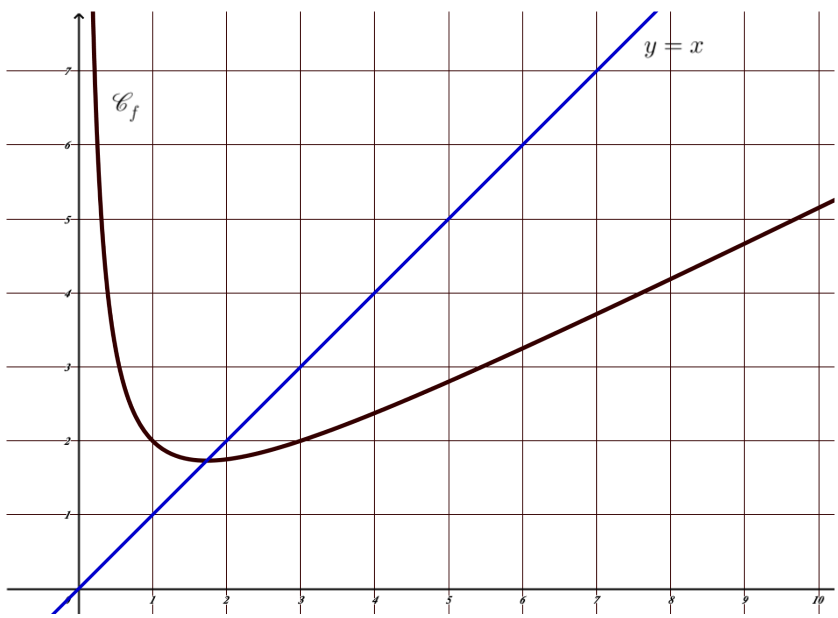
Etude de la suite de Héron

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right).$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$. *On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.*

1. **Avec Python :**
   (a) Ecrire une fonction Python f qui prend pour argument x et qui renvoie la valeur $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et la chaîne de caractères : "x n'est pas strictement positif" lorsque $x \notin \mathbb{R}_+^\star$.
   (b) A l'aide de la fonction f précédente, écrire une fonction Python u qui demande un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de u_n.
   (c) Calculer quelques valeurs successives de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vers quelle valeur semble se "rapprocher" $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. **Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   (b) Représenter les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin de conjecturer ses variations.



   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > \sqrt{3}$.
   (d) Dans cette question, on cherche à justifier la conjecture réalisée à la question 2.(b) sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par deux méthodes distinctes :
      (i) **Méthode n°1 :** Démontrer la conjecture en raisonnant par récurrence.
      (ii) **Méthode n°2 :** Etudier sur $\mathbb{R}_+^\star$ le signe de $f(x) - x$. En déduire de nouveau une justification de votre conjecture.
   (e) A partir de cette question, on suppose que $u_0 = 2$ et on admet que les propriétés conjecturées à la question 2.(b) pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste vraies dans ce cas. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{3}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}.$$

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n^2$.
   (f) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{2^n}}$.
   (g) En déduire une valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle $0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant 10^{-10}$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆