Devoir libre n°4, à rendre le mardi 12 janvier 2021

L'objectif de ce devoir est de démontrer la limite annoncée lors du TD sur les suites :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

On considère les suites d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x\qquad\textbf{et}\qquad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer J_0 et justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant J_n$.
2. A l'aide d'un changement de variable affine que vous préciserez (voir formulaire de trigonométrie !), montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

On a montré en cours que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad I_n=\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. *On admet donc ce résultat dans la suite.*

3. Montrer à l'aide de <u>deux IPP successives</u> que, pour tout $k\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}$, on a :
$$I_k=-2k^2J_k+k(2k-1)J_{k-1}.$$
4. En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\quad\dfrac{\pi}{4k^2}=\dfrac{4^{k-1}((k-1)!)^2}{(2k-2)!}J_{k-1}-\dfrac{4^k(k!)^2}{(2k)!}J_k$.
5. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n$.
6. *On montre dans cette question que la suite* $\left(\dfrac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\right)_{n\geqslant 1}$ *converge vers zéro.*
   (a) Montrer que, pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad\dfrac{2}{\pi}x\leqslant\sin(x)$.
   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}$. En déduire que : $\quad J_n\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$, $\quad$ puis que $J_n\leqslant\dfrac{\pi^2I_n}{8(n+1)}$.
   (c) Montrer que $\quad\left(\dfrac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\right)_{n\geqslant 1}$ $\quad$ converge vers zéro.
7. Conclure.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆