Devoir maison n°4, à rendre le vendredi 16 décembre 2021

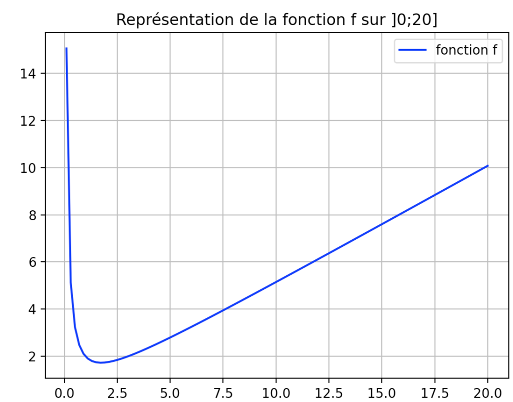
Exercice n°1 Etude de la suite de Héron

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right).$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$.

1. **Avec Python :**
   (a) On souhaite tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]0;20]$.
   On obtient le résultat suivant :



   Ecrire un programme python qui permet d'obtenir ce résultat.

   (b) Ecrire un programme Python qui demande un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de u_n.

   (c) Pour cette question, on admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$. Ecrire un programme demandant à l'utilisateur un réel strictement positif ε et renvoyant la valeur du premier terme un tel que $|u_n - \sqrt{3}| \leqslant \varepsilon$ ainsi que son indice.

2. **Etude théorique :**
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > \sqrt{3}$.

   (c) Dans cette question, on cherche à étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par deux méthodes distinctes :
      (i) **Méthode n°1 :** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante en raisonnant par récurrence.
      (ii) **Méthode n°2 :** Etudier sur $\mathbb{R}_+^\star$ le signe de $f(x) - x$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (d) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{3}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}.$$

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n^2$.

   (e) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆