Correction du DM n°4

Exercice :

1) a)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0.1, 20, 100)
y = (1/2)*(x + 3/x)
plt.plot(x, y, label = "fonction f")
plt.title("Représentation de la fonction f sur ]0;20]")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

b)

```
n = int(input("Entrer un entier positif"))
u = 2
for k in range(n):
        u = (1/2)*(u + 3/u)
print(u)
```

c)

```
eps = float(input("Entrer un réel strictement positif"))
n = 0
u = 2
while abs(u - np.sqrt(3)) > eps:
        u = (1/2)*(u + 3/u)
        n = n + 1
print(u, n)
```

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{x^2-3}{2x^2}$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2 - 3$. On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) = +\infty$
- $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$

(on rappelle que $3 = (\sqrt{3})^2$)

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$\mathcal{P}(n)$: " u_n est bien défini et $u_n > \sqrt{3}$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai car u_0 est bien défini par hypothèse et $u_0 = 2$, donc $u_0 > \sqrt{3}$ $\left(\text{on rappelle que } 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733\right)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence u_n est bien défini et $u_n > \sqrt{3}$.

  En particulier $u_n > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.

  On sait par la question précédente que f est strictement croissante sur $[\sqrt{3} ; +\infty[$. Ainsi, de $u_n > \sqrt{3}$, on déduit que $f(u_n) > f(\sqrt{3})$ ie $u_{n+1} > \sqrt{3}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.
- Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) (i) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $u_{n+1} \leqslant u_n$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{3}{u_0}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{4} \leqslant \frac{8}{4} = 2$$

donc $u_1 \leqslant u_0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence $u_{n+1} \leqslant u_n$, de plus la question b) nous assure que $u_n, u_{n+1} \in [\sqrt{3}; +\infty[$ et la question a) nous assure que f est (strictement) croissante sur $[\sqrt{3}; +\infty[$. On en déduit que $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ ie $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) - x = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{3}{x}\right) = \frac{3 - x^2}{2x}.$$

Comme $2x > 0$, le signe de $f(x) - x$ est le signe de $3 - x^2$.

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

D'après la question b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{3}; +\infty[$. Donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{v_n^2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{3})^2}{2u_n} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{3}u_n + 3}{2u_n}$$

$$= \frac{1}{2}u_n - \sqrt{3} + \frac{3}{2u_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) - \sqrt{3}$$

$$= u_{n+1} - \sqrt{3}$$

$$= v_{n+1}$$

Enfin, comme $u_n > \sqrt{3}$, on a : $2u_n > 2\sqrt{3} \geqslant 1$

ainsi $\frac{1}{2u_n} \leqslant 1$ et, par suite $\frac{v_n^2}{2u_n} \leqslant v_n^2$ (car $v_n^2 = (u_n - \sqrt{3})^2 \geqslant 0$)

ie $\underline{v_{n+1} \leqslant v_n^2}$.

e) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{2^n}}$ "

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $v_0 = 2 - \sqrt{3}$ et comme $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ on a $0{,}2 < v_0 < 0{,}3$. Donc $0 \leqslant v_0 \leqslant \frac{1}{2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{2^n}}$, ainsi par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que $0 \leqslant v_n^2 \leqslant \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2 = \frac{1}{2^{2^n \times 2}} = \frac{1}{2^{n+\cdots}}$

Or, la question précédente nous assure que : $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n^2$.
Donc, par transitivité, $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$ et $P(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.