ECG

Devoir maison n°4, à rendre le lundi 18 décembre 2023

Exercice n°1 : Etude d'une suite définie par un produit

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

L'objectif est de montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ converge et de déterminer sa limite.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. **Python :** Ecrire une fonction Python `suite1` qui prend pour argument une entier n supérieur à 1 et qui renvoie la valeur P_n. En testant votre fonction avec des valeurs de n de plus en plus grandes (10, 100, 1000...), conjecturer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ converge et une valeur approchée à 10^{-3} de sa limite.

On introduit la suite auxiliaire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par : $S_n = \ln(P_n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Ecrire S_n à l'aide du symbole $\sum$.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
5. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$
6. Conclure.

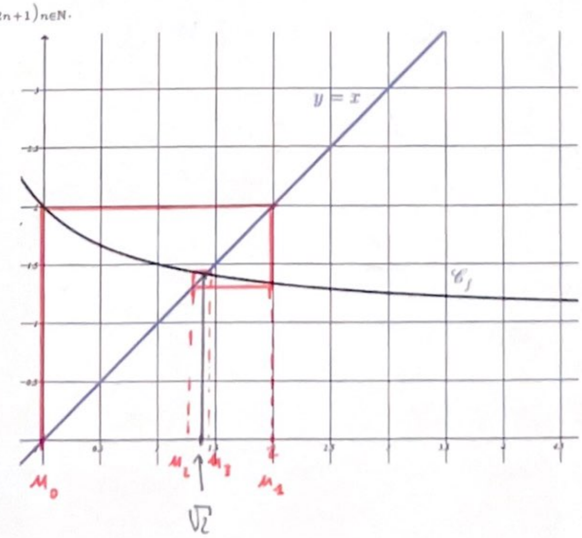
Exercice n°2 : Etude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un cas où f décroissante

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{1+x}$. *On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.*

1. **Python :** Ecrire une fonction Python `suite2` qui prend pour argument une entier positif n et qui renvoie la valeur u_n.
2. Calculer u_1, u_2 et u_3.
3. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer l'unique point fixe de f.
4. Représenter les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis conjecturer les variations et le comportement asymptotique des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.



⟶ **Tournez la page**

Correction DM n°4

Exercice n°1 :

1) $P_1 = \prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{k}{1^2}\right) = \left(1+\frac{1}{1^2}\right) = 2$

$P_2 = \prod_{k=1}^{2}\left(1+\frac{k}{2^2}\right) = \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{2}{2^2}\right) = \frac{5}{4}\times\frac{3}{2} = \frac{15}{8}$

$P_3 = \prod_{k=1}^{3}\left(1+\frac{k}{3^2}\right) = \left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{2}{3^2}\right)\left(1+\frac{3}{3^2}\right) = \frac{10}{9}\times\frac{11}{9}\times\frac{4}{3} = \frac{440}{243}$

2)
```
def suite(n):
    P = 1
    for k in range(1,n+1):
        P = P*(1 + k/n**2)
    return P
```

On trouve alors : $P_{10} \simeq 1,7018$

$P_{100} \simeq 1,6542$

$P_{1000} \simeq 1,6492$

$P_{10\,000} \simeq 1,6487$

$P_{100\,000} \simeq 1,6487$

$P_{10^6} \simeq 1,6487$

On conjecture que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ converge vers $\ell \simeq 1,648$.

3) Soit $n\in\mathbb{N}^{\geq 1}$. On a : $S_n = \ln(P_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

(On remarque que : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\left(1+\frac{k}{n^2}\right)>0$ et que $P_n>0$, les expressions ci-dessus sont donc bien définies).

4) On considère les fonctions $f : x \longmapsto x-\ln(1+x)$ et $g : x\longmapsto \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

- Etudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+$:

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \frac{1}{1+x} \geqslant 0$

$$\iff 1 \geqslant \frac{1}{1+x}$$
$$\iff 1 \leqslant 1+x$$
$$\iff 0 \leqslant x$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(0) \leqslant f(x) \quad \text{ie} \quad 0 \leqslant x - \ln(1+x).$$

On a montré que : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$

- Etudions les variations de g sur $\mathbb{R}_+$:

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0$.

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(0) \leqslant g(x) \quad \text{ie} \quad 0 \leqslant \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

On a montré que : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x).}$

Conclusion : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{k}{n^2} \in \mathbb{R}_+$. On peut donc substituer à x la valeur $\frac{k}{n^2}$ dans les inégalités obtenues à la question précédente, on obtient :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\quad \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leqslant \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

D'autre part :

- $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = S_n$ par la question 3) ;
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$;
- $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$= \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{6n^2(n+1) - (n+1)(2n+1)}{12n^3}$$

$$= \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3}.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.$

6) Pour $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, on a :

$$\frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(6-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{12n^3} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(6-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{12} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

et $\frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{2n}$, le théorème d'encadrement nous assure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ converge et que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $S_n = \ln(P_n) \iff P_n = \exp(S_n)$.

On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} S_n\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$.

(On remarquera, en lien avec la question 2), que $\sqrt{e} \simeq 1,6487$)

Exercice n°2 :

1)
```
def suite2(n):
    u = 0
    for k in range(1,n+1):
        u = 1 + 1/(1+u)
    return u
```

2) $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{4}{3}$; $u_3 = \frac{10}{7}$.

3) On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Déterminons les éventuels points fixes de f :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a : $f(x) = x \iff 1 + \frac{1}{1+x} = x$

$\iff 2 + x = x + x^2$

$\iff x^2 = 2$

$\iff x = \sqrt{2}$ $[-\sqrt{2} \notin \mathbb{R}_+]$

La fonction f possède $\sqrt{2}$ pour unique point fixe.

4) Voir graphique. On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone et semble converger vers $\sqrt{2}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et semble converger vers $\sqrt{2}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et semble converger vers $\sqrt{2}$.

5) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: " u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ".

- $P(0)$ vrai car u_0 existe par hypothèse et vaut 0, ainsi $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par hypothèse u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. En particulier $u_n \in \mathbb{R}_+$, donc $f(u_n) = u_{n+1}$ existe. De plus, comme f est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a : $f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(2)$ ie $0 \leqslant \frac{4}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Donc $P(n+1)$ est vrai.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$.

On note $g : x \longmapsto f(f(x)) = 1 + \dfrac{1}{1+f(x)} = 1 + \dfrac{1}{2+\frac{1}{1+x}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \in \mathbb{R}_+$ ainsi g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

On a bien : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+2} = g(u_{2n})}$.

<u>Déterminons les éventuels points fixes de g :</u>

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$g(x) = x \iff 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+x}} = x$$
$$\iff 1 + \frac{1+x}{3+2x} = x$$
$$\iff 4 + 3x = 3x + 2x^2$$
$$\iff x^2 = 2$$
$$\iff x = \sqrt{2} \quad [-\sqrt{2} \notin \mathbb{R}_+]$$

<u>La fonction g possède un unique point fixe : $\sqrt{2}$</u>

7) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: "$u_{2n} \leq u_{2n+2}$"

- $P(0)$ vrai car $u_0 = 0$ et $u_2 = \frac{4}{3}$, donc $u_0 \leq u_2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Par hypothèse $u_{2n} \leq u_{2n+2}$. On a montré à la question 5) que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$ et à la question 3) que f est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$, par conséquent : $f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2})$ ie $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$ puis $f(u_{2n+1}) \leqslant f(u_{2n+3})$ ie $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4}$. Donc $P(n+1)$ est vrai.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8) La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (par la question 7)) et majorée par 2 (par la question 5)), elle converge donc, par le théorème de la limite monotone, vers une limite $\ell \in [0;2]$.
De plus, par la question 6), on a la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = g(u_{2n})$.
En passant à la limite dans cette relation, on trouve $\ell = g(\ell)$. Autrement dit ℓ est un point fixe de g appartenant à $[0;2]$, cela ne peut être que $\ell = \sqrt{2}$ par la question 6).
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt{2}$.

9) On sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = f(u_{2n})$. La question précédente nous assure que (u_{2n}) converge vers $\sqrt{2}$. Ainsi la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ étant un point fixe de f).

10) Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices pairs et impairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\sqrt{2}$. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $\sqrt{2}$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$