Devoir maison n°4, à rendre le mercredi 20 décembre 2023

Exercice n°1 : Etude d'une suite définie par un produit

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

L'objectif est de montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ converge et de déterminer sa limite.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. **Python :** Ecrire une fonction Python `suite1` qui prend pour argument une entier n supérieur à 1 et qui renvoie la valeur P_n. En testant votre fonction avec des valeurs de n de plus en plus grandes (10, 100, 1000...), conjecturer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ converge et une valeur approchée à 10^{-3} de sa limite.

On introduit la suite auxiliaire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par : $S_n = \ln(P_n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Ecrire S_n à l'aide du symbole $\sum$.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
5. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$
6. Conclure.

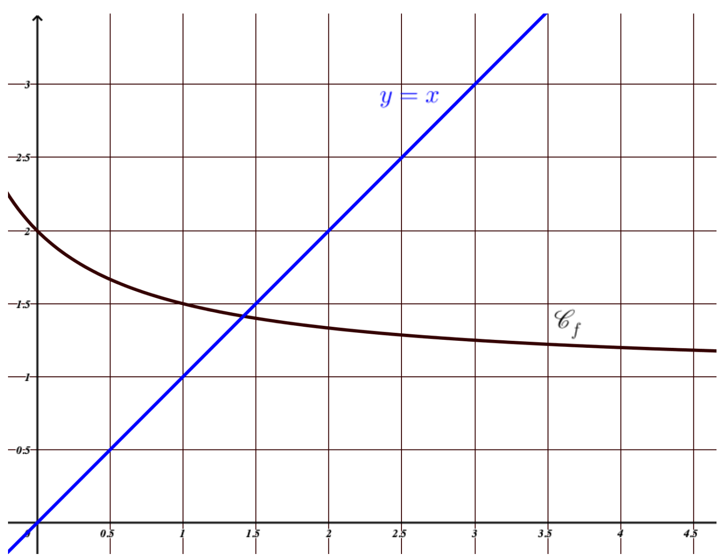
Exercice n°2 : Etude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un cas où f décroissante

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{1+x}$. *On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.*

1. **Python :** Ecrire une fonction Python `suite2` qui prend pour argument une entier positif n et qui renvoie la valeur u_n.
2. Calculer u_1, u_2 et u_3.
3. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer l'unique point fixe de f.
4. Représenter les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis conjecturer les variations et le comportement asymptotique des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.



⟶ **Tournez la page**

5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
6. Déterminer une fonction g, définie sur $\mathbb{R}_+$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = g(u_{2n})$. Déterminer l'unique point fixe de g.
7. Démontrer la conjecture réalisée à la question 3. quant aux variations de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
8. En déduire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.
9. Montrer que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.
10. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

$\star\star\star$ **Fin du sujet** $\star\star\star$