Devoir maison n°5, à rendre le mardi 10 janvier 2023

Exercice n°1 Etude d'une fonction et d'une suite récurrente (extrait d'un sujet de concours)

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}}.$$

- *On admet que $2 < e < 3$.*
- *On admet également que la fonction φ est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, c'est-à-dire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (de dérivée φ'), φ' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (de dérivée φ'') et φ'' est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (de dérivée φ''').*

Partie I : Etude de la fonction φ

1. **Python :** Ecrire un programme en Python permettant de définir la fonction φ puis de la tracer sur l'intervalle $[-5; 5]$ avec un pas de $0,01$. Ajouter un titre et une légende.
2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi'(x)$ puis $\varphi''(x)$ et enfin montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}.$$
3. En déduire le tableau de variation de φ'' sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer $\varphi''(1)$ (valeur à placer dans le tableau).
4. En déduire le tableau de variation de φ' et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi'(x) \geqslant e$.
5. On admet que $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer que, pour tout $x \in [3; +\infty[$, $\varphi(x) \geqslant ex$.
6. Déterminer les limites de φ lorsque x tend 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
   Dresser le tableau de variation de φ sur $\mathbb{R}_+^\star$ (faire apparaître la valeur en 1).

Partie II : Etude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

Lorsque cela est nécessaire, on utilisera les résultats de la partie I pour répondre aux questions qui suivent. Dans ce cas, on précisera **clairement** le résultat de la partie I utilisé.

1. **Python :** Ecrire un programme en Python qui demande à l'utilisateur un entier n positif et qui affiche u_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et que $u_n \geqslant 3$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3e^n$.
5. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite et la déterminer.
6. **Python :** Ecrire un programme en Python qui affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^6$.

Exercice n°2 Etude d'une suite récurrence (extrait d'un sujet de concours)

Partie I : Résultat préliminaire

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. **Python :** Ecrire une fonction Python qui prend comme argument d'entré n un entier strictement positif et qui renvoie la valeur de v_n.
2. Montrer que : $\forall x \in [0;1[,\ \ln(1-x) \leqslant -x$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$. Déduire de la question précédente que $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1))$ par télescopage.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1},\ v_n \leqslant \ln(n) + 1$.

Partie II : Etablir un encadrement

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \dfrac{1}{u_k^2}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2)$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $u_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (d) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $u_n^2 \geqslant 2n + 1$ puis que $\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{2n}$.
   (e) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite et la déterminer.
3. (a) A l'aide des résultats précédents, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, on a (avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ la suite définie dans la partie I) :

$$u_n^2 \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

   (b) En utilisant la partie I, établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, on a

$$u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

Partie III : Un résultat numérique

1. On donne $\ln 2 < 0,7$ et $\ln 5 < 1,61$. En déduire que $\ln(5000) < 8,54$.
2. Montrer que le premier entier pour lequel $u_n \geqslant 100$ est compris entre 4995 et 5000.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆