Correction DM n°6

1) $X_0 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $X_1 = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2) a) On pose $\underbrace{A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}}$.

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$AX_n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = X_{n+1}$$

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$X_n = A^n X_0$"

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  D'après 2)a), $X_{n+1} = AX_n$ et, par hypothèse de récurrence, $X_n = A^n X_0$, ainsi $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Soient $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y + 4z = a \\ x + 2y + 4z = b \\ x + 4y = c \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \begin{cases} x + y + 4z = a \\ y = b - a \\ 3y - 4z = c - a \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} \begin{cases} x + y + 4z = a \\ y = b - a \\ -4z = 2a - 3b + c \end{cases}$$

Il y a trois pivots non nuls, le système est de Cramer et P est inversible

$$\iff \begin{cases} x = 4a - 4b + c \\ y = -a + b \\ z = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b - \frac{1}{4}c \end{cases}$$

Donc $\underbrace{P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}}$

b) On a :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 5 & -1 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T$$

On en déduit que $A = PTP^{-1}$ (par multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1}).

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $A^n = PT^nP^{-1}$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$A^{n+1} = A^n \times A$ et $A^n = PT^nP^{-1}$ par hypothèse de récurrence

donc : $A^{n+1} = (PT^nP^{-1})A$

$= (PT^nP^{-1})(PTP^{-1})$ [car $A = PTP^{-1}$]

$= PT^n \underbrace{P^{-1}P}_{I_3} TP^{-1}$

$= PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) a) $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_3$, $N^3 = N \times N^2 = N \times O_3 = O_3$

Par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $N^k = O_3$.

b) On a :

$$DN = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ND = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $DN = ND$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: " $D^n N = N D^n$ "

- $P(0)$ vrai car $D^0 N = I_3 N = N I_3 = N D^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On a : $D^{n+1} N = D D^n N$

$= D N D^n$ [par hypothèse de récurrence]

$= N D D^n$ [car $ND = DN$]

$= N D^{n+1}$

Donc $P(n+1)$ vrai

- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, la proposition

$$P(n) : \text{" } T^n = D^n + n N D^{n-1} \text{ "}.$$

- $P(1)$ vrai car $D^1 + 1.ND^0 = D + N I_3 = D + N = T$

[en effet $N = T - D \iff T = D + N$]

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$T^{n+1} = T.T^n$, $T^n = D^n + n N D^{n-1}$ et $T = D + N$, ainsi :

$$T^{n+1} = (D+N)(D^n + n N D^{n-1})$$
$$= D^{n+1} + n D N D^{n-1} + N D^n + n N^2 D^{n-1}$$

Or, d'après 4) a) $N^2 = O_3$ et d'après 4) b) $DN = ND$,

donc : $T^{n+1} = D^{n+1} + n\,NDD^{n-1} + ND^n + n\,O_3 D^{n-1}$

$= D^{n+1} + n\,ND^n + ND^n$

$= D^{n+1} + (n+1)ND^n$.

$\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Par la question précédente :

$$T^n = D^n + n\,ND^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{n}{2^{n-1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette formule est valide dans le cas $n = 0$ car :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 = T^0.$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par les questions 3) b) et 4) d), on a :

$$A^n = PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 1 & 4+2n \\ 2^n & 2 & 4+4n \\ 2^n & 4 & 8n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Donc $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^{n+2} - n - 3 & -2^{n+2} + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 2^{n+2} - 2n - 4 & -2^{n+2} + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 2^{n+2} - 4n - 4 & -2^{n+2} + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{bmatrix}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 2)b), $X_n = A^n X_0$, ainsi à l'aide du résultat de la question 4) on trouve :

$$\begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = X_n = A^n X_0 = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^{n+2} - n - 3 \\ 2^{n+2} - 2n - 4 \\ 2^{n+2} - 4n - 4 \end{bmatrix}.$$

Donc $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2^{n+2} - 4n - 4\right) = 4\left(1 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right)$.

6) Par croissance comparée $\frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4.$$