Devoir libre n°6

Travail en analyse :

Exercice n°1 : Exercice n°3 du TD 18.

Exercice n°2 : Exercice n°4 du TD 18.

Exercice n°3 : Exercice n°6 du TD 18.

Travail en algèbre :

Exercice n°1 : Algèbre linéaire sur $\mathbb{R}^3$, projecteurs et symétries

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, où on considère les sous-ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \quad \text{et} \quad z - 2y = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de chacun d'entre eux.
2. Prouver que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
4. On note p la projection sur F parallèlement à G.
   (a) Donner l'expression de $p(x, y, z)$.
   (b) Donner l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
5. On considère l'application
$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y - z,\ y,\ y) \end{array}$$
   (a) Montrer que l'application q est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   L'application q est-elle un projecteur ? Justifier.
   (b) Déterminer une base de Ker(q) et vérifier que Ker(q) est un supplémentaire de F.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p)$.
   (d) En déduire que $p \circ q = q$ et que $q \circ p = p$.
6. On note r l'application définie par $r = p + q$.
   (a) L'application r est-elle un projecteur ? Justifier.
   (b) Calculer r^n pour tout entier $n \geqslant 2$, on exprimera le résultat en fonction de r.

Exercice 2 : Applications linéaires sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

1. (a) Justifier que $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2, \ldots, (X - 1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Notons $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
   Exprimer les a_k en fonction des dérivées successives de P.
2. On pose : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (X - 1)P' - 2P$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Calculer $\varphi((X-1)^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

(c) Donner une base de $\text{Im}(\varphi)$. En déduire le rang de φ.

(d) Donner une base de $\text{Ker}(\varphi)$. En déduire sa dimension.

3. On considère l'application $\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P''(1) \end{array}$

   (a) Montrer que u est linéaire.

   (b) Montrer que u est surjective.

   (c) Quelle est la dimension de $N = \text{Ker}(u)$?

4. (a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in N$.

   (b) Montrer que $\text{Im}(\varphi) = N$.

5. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $P = Q + R$, où Q et R sont des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} Q''(1) = 0 \\ (X-1)R' - 2R = 0 \end{cases}$$

Exercice n°3 : Plus théorique

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque (pas nécessairement de dimension finie) et
$f \in \mathscr{L}(E)$, telle que : $f^2 - 4f + 3\text{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $f \in GL(E)$ (on pourra exprimer sa réciproque en fonction de f ou, sinon, montrer son injectivité et sa surjectivité).

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\text{Ker}(f - \lambda\text{id}_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$.

   (b) Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{id}_E)$.
   On procédera par analyse-synthèse en s'inspirant de la preuve qui a été faite pour montrer que les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   L'objectif est donc de montrer que tout élément de E s'écrit, de manière unique, comme la somme d'un élément de Ker$(f - \text{id}_E)$ et d'un élément de Ker$(f - 3\text{id}_E)$.
   On utilisera le résultat de la question précédente.