Devoir maison n°6, à rendre le vendredi 10 février 2023

Problème Suite récurrente d'ordre 3 et matrice

L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linéaire récurrente d'ordre 3 définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $X_n = \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.
2. (a) Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En raisonnant par récurrence, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.
3. Soient P et T les matrices suivantes : $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $T = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.
   (b) Vérifier que $P^{-1}AP = T$.
   A l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
4. Soit D la matrice définie par : $D = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   On pose : $N = T - D$.
   (a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, la matrice N^k.
   (b) Vérifier que $DN = ND$ et en déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $D^kN = ND^k$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, on a

   $$T^n = D^n + nND^{n-1}.$$

   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, on a :

   $$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Cette formule est-elle valable pour $n = 0$?
   (e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les neuf coefficients de la matrice A^n.
5. Déduire les questions précédentes l'expression de u_n en fonction n.
6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆