Devoir maison n°6, à rendre le mercredi 14 février 2024

L'exercice n°1 est à traiter obligatoirement.
Il faut également traiter <u>au moins</u> un des deux autres exercices.

Exercice n°1 Un calcul de puissances d'une matrice avec la formule du binôme de Newton

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. **Calcul des puissances de Δ**
   (a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Déterminer une matrice diagonale D telle que $PD = \Delta P$. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ^n.
2. **Calcul des puissances de A**
   (a) On considère la matrice $N = A - \Delta$. Calculer N, N^2, puis N^k pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$.
   (b) Montrer que $\Delta N = N\Delta$.
   (c) A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice n°2 Calcul d'une somme à l'aide des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite déterminer la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$.

1. Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\quad k(k+1)(k+2)(k+3) = 4!\dbinom{k+3}{4}$.
2. Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\quad \dbinom{k+3}{4} = \dbinom{k+4}{5} - \dbinom{k+3}{5}$.
3. En déduire que $\quad S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$.

Exercice n°3 Une autre expression de la série harmonique

L'objectif de cet exercice est de démontrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}$.

1. Montrer que, pour tous $k, n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ tels que $k \leqslant n$, $\quad \dfrac{1}{k}\dbinom{n-1}{k-1} = \dfrac{1}{n}\dbinom{n}{k}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k} = 1$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $\quad S_n - S_{n-1} = \dfrac{1}{n}$.
4. En déduire la relation demandée.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆