Devoir maison n°7, à rendre le mardi 4 avril 2023

Partie I : Processus aléatoire d'Erenfest

On considère deux urnes U et V contenant chacune 2 boules. Au départ, l'urne U contient 2 boules blanches et l'urne V contient 2 boules noires.

On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (il y a donc échange de 2 boules à chaque tirage).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les événements :

Z_n : « à l'issue du n-ième tirage, l'urne U contient zéro boule blanche. »
U_n : « à l'issue du n-ième tirage, l'urne U contient une seule boule blanche. »
D_n : « à l'issue du n-ième tirage, l'urne U contient deux boules blanches. »
B_n^U : « piocher une boule blanche dans l'urne U au n-ième tirage »
B_n^V : « piocher une boule blanche dans l'urne V au n-ième tirage »

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose la matrice colonne : $C_n = \begin{bmatrix} P(Z_n) \\ P(U_n) \\ P(D_n) \end{bmatrix}$.

On s'intéresse à la probabilité de ces 3 événements.

1. <u>Cas $n = 0$ et $n = 1$</u> : Déterminer C_0 et C_1. Justifier brièvement.
2. <u>Cas $n = 2$</u> : Justifier, en français, que $P_{U_1}(Z_2) = P_{U_1}\left(B_2^U \cap \overline{B_2^V}\right)$. Déduire de la formule des probabilités totales la valeur de $P(Z_2)$. Pour la suite, on admettra que $P(U_2) = \dfrac{1}{2}$ et $P(D_2) = \dfrac{1}{4}$.
3. <u>Cas $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$ quelconque fixé</u> :
   (a) Justifier, en français, que $\{Z_n, U_n, D_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   (b) **Probabilités conditionnées par Z_n et D_n**
   Donner, en justifiant brièvement, la valeur des 6 probabilités conditionnelles :
   $$P_{Z_n}(Z_{n+1}) \quad ; \quad P_{Z_n}(U_{n+1}) \quad ; \quad P_{Z_n}(D_{n+1}) \quad ; \quad P_{D_n}(Z_{n+1}) \quad ; \quad P_{U_n}(Z_{n+1}) \quad ; \quad P_{D_n}(D_{n+1})$$
   (c) **Probabilités conditionnées par U_n**
      (i) Justifier, en français, que $P_{U_n}(U_{n+1}) = P_{U_n}\left(\left(B_{n+1}^U \cap B_{n+1}^V\right) \cup \left(\overline{B_{n+1}^U} \cap \overline{B_{n+1}^V}\right)\right)$.
      (ii) On rappelle que l'application P_{U_n} est une probabilité. En déduire que $P_{U_n}(U_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.
      (iii) On admet que $P_{U_n}(Z_{n+1}) = P_{U_n}(D_{n+1})$. Calculer ces probabilités.
   (d) **Obtention d'une relation de récurrence** :
      (i) Déterminer une expression de $P(Z_{n+1})$ en fonction des coefficients de C_n, et de probabilités conditionnelles. Faire de même pour $P(U_{n+1})$ et $P(D_{n+1})$.
      (ii) Grâce aux probabilités calculées dans les questions précédentes, trouver alors une matrice M telle que $C_{n+1} = MC_n$. Vérifier que cette relation est valide dans les cas $n = 0$ et $n = 1$.
      (iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que C_n est la troisième colonne de la matrice M^n.

Partie II : Expressions de $P(U_n), P(D_n), P(Z_n)$ et convergence

On cherche à exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Z_n)$, $P(U_n)$, et $P(D_n)$ en fonction de n par deux méthodes différentes.

1. **Méthode n°1 : Par le calcul de** M^n

   On considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   (b) Justifier qu'il existe une unique matrice diagonale D telle que $PD = MP$.

   (c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

   (d) Déduire de la question $I.3.(d)(iii)$, les valeurs de $P(U_n), P(D_n)$ et $P(Z_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. **Méthode n°2 : Par étude d'une relation de récurrence linéaire**

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = P(Z_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $d_n = P(D_n)$.
   En partant de la question $I.3.(d)(i)$ répondre aux questions suivantes.

   (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $z_n = d_n$.

   (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$.
   En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, une expression explicite de z_n et d_n en fonction de n.

3. Calculer alors la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $P(Z_n)$, $P(U_n)$, et $P(D_n)$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆