Correction du DM n°7

Partie I :

1) Au départ, l'urne U contient 2 boules blanches et l'urne V contient deux boules blanches. Ainsi : $P(Z_0) = P(U_0) = 0$ et $P(D_0) = 1$. Lors du premier tirage, on tire nécessairement une boule blanche de l'urne U et une boule noire de l'urne V ; suite à l'échange, l'urne U contient nécessairement une boule blanche et une boule noire. Donc : $P(Z_1) = P(D_1) = 0$ et $P(U_1) = 1$. On obtient : $C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2) Pour qu'il n'y ait plus de boule blanche dans l'urne U à l'issue du deuxième échange sachant qu'il y en avait exactement une, il faut nécessairement, lors du deuxième échange, tirer la boule blanche de U et la boule noire de V. L'événement "tirer une boule blanche de U au 2-ième tirage et tirer une boule noire de V au 2-ième tirage" s'écrit $B_2^U \cap \overline{B_2^V}$. Donc :

$$P_{U_1}(Z_2) = P_{U_1}(B_2^U \cap \overline{B_2^V})$$

En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{Z_1 ; U_1 ; D_1\}$, on obtient :

$$P(Z_2) = P(Z_2 \cap Z_1) + P(Z_2 \cap U_1) + P(Z_2 \cap D_1).$$

Or $P(Z_1) = P(D_1) = 0$ donc $P(Z_2 \cap Z_1) = P(Z_2 \cap D_1) = 0$.

D'autre part : $P(Z_2 \cap U_1) = \underbrace{P(U_1)}_{=1} P_{U_1}(Z_2) = P_{U_1}(B_2^U \cap \overline{B_2^V})$

et les tirages dans les deux urnes étant indépendants, on trouve :

②

$P(Z_2 \cap U_1) = P_{U_1}(B_2^U) \times P_{U_1}(\overline{B_2^V}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
étant donné que les boules ont une chance équiprobable d'être tirées.

<u>Conclusion :</u> $\underline{P(Z_2) = \frac{1}{4}}$.

3) a) A partir du second échange, l'urne U peut contenir 0, 1 ou 2 boules blanches, ainsi $P(Z_n) \neq 0$, $P(U_n) \neq 0$ et $P(D_n) \neq 0$.
Nécessairement l'urne U contient, soit 0, soit 1, soit 2 boules blanches, ainsi

$\Omega = Z_n \cup U_n \cup D_n$ et $Z_n \cap U_n = \emptyset$, $Z_n \cap D_n = \emptyset$ et $U_n \cap D_n = \emptyset$. Donc <u>$\{Z_n, U_n, D_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.</u>

b) $P_{Z_n}(Z_{n+1}) = 0$ car s'il n'y a pas de boule blanche à l'issue du
$P_{Z_n}(U_{n+1}) = 1$ n-ième tirage, il y a deux boules blanches dans l'urne
V et le $(n+1)$-ième échange amènera une boule blanche
$P_{Z_n}(D_{n+1}) = 0$ dans U nécessairement.

$P_{D_n}(Z_{n+1}) = 0$ car s'il y a deux boules blanches à l'issue du
$P_{D_n}(U_{n+1}) = 1$ n-ième tirage, il y a deux boules noires dans l'urne
V et le $(n+1)$-ième échange amènera une boule
$P_{D_n}(D_{n+1}) = 0$ noire dans U nécessairement.

c) (i) Si il y a une boule blanche dans U à l'issue du n-ième tirage il restera une blanche dans U à l'issue du $(n+1)$-ième tirage si et seulement si on échange les blanches de U et V ou les noires de U et V au $(n+1)$-ième tirage. Cet événement s'écrit :

$\left(B^U_{n+1} \cap B^V_{n+1}\right) \cup \left(\overline{B^U_{n+1}} \cap \overline{B^V_{n+1}}\right)$. Ainsi : (3)

$$\underline{P_{U_n}(U_{n+1}) = P_{U_n}\left(\left(B^U_{n+1} \cap B^V_{n+1}\right) \cup \left(\overline{B^U_{n+1}} \cap \overline{B^V_{n+1}}\right)\right)}$$

(ii) Par <u>incompatibilité</u> des événements $B^U_{n+1} \cap B^V_{n+1}$ et $\overline{B^U_{n+1}} \cap \overline{B^V_{n+1}}$ on trouve :

$$P_{U_n}(U_{n+1}) = P_{U_n}\left(B^U_{n+1} \cap B^V_{n+1}\right) + P_{U_n}\left(\overline{B^U_{n+1}} \cap \overline{B^V_{n+1}}\right).$$

<u>Par indépendance</u> des événements B^U_{n+1} et B^V_{n+1}, les événements $\overline{B^U_{n+1}}$ et $\overline{B^V_{n+1}}$ sont également indépendants et on déduit que :

$$P_{U_n}(U_{n+1}) = P_{U_n}\left(B^U_{n+1}\right) P_{U_n}\left(B^V_{n+1}\right) + P_{U_n}\left(\overline{B^U_{n+1}}\right) P_{U_n}\left(\overline{B^V_{n+1}}\right).$$

Enfin par <u>équiprobabilité</u> des tirages :

$$P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\underline{P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{2}}$.

(iii) On sait par 3) a) que $\{Z_{n+1}, U_{n+1}, D_{n+1}\}$ est un système complet d'événements ainsi :

$$P_{U_n}\left(Z_{n+1} \cup U_{n+1} \cup D_{n+1}\right) = P_{U_n}(Z_{n+1}) + P_{U_n}(U_{n+1}) + P_{U_n}(D_{n+1}) = 1$$

Comme $P_{U_n}(Z_{n+1}) = P_{U_n}(D_{n+1})$, on obtient :

$$2 P_{U_n}(Z_{n+1}) = 1 - P_{U_n}(U_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc : $\underline{P_{U_n}(Z_{n+1}) = P_{U_n}(D_{n+1}) = \frac{1}{4}}$.

d) (i) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{Z_n, U_n, D_n\}$, on trouve :

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1}) &= P(Z_{n+1} \cap Z_n) + P(Z_{n+1} \cap U_n) + P(Z_{n+1} \cap D_n) \\ &= P(Z_n) P_{Z_n}(Z_{n+1}) + P(U_n) P_{U_n}(Z_{n+1}) + P(D_n) P_{D_n}(Z_{n+1}) \\ &= P(Z_n) \times 0 + P(U_n) \times \frac{1}{4} + P(D_n) \times 0 \\ &= \frac{1}{4} P(U_n) \end{aligned}$$

De même :
$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P(Z_n) P_{Z_n}(U_{n+1}) + P(U_n) P_{U_n}(U_{n+1}) + P(D_n) P_{D_n}(U_{n+1}) \\ &= P(Z_n) \times 1 + P(U_n) \times \frac{1}{2} + P(D_n) \times 1 \\ &= P(Z_n) + \frac{1}{2} P(U_n) + P(D_n) \end{aligned}$$

et :
$$\begin{aligned} P(D_{n+1}) &= P(Z_n) P_{Z_n}(D_{n+1}) + P(U_n) P_{U_n}(D_{n+1}) + P(D_n) P_{D_n}(D_{n+1}) \\ &= P(Z_n) \times 0 + P(U_n) \times \frac{1}{4} + P(D_n) \times 0 \\ &= \frac{1}{4} P(U_n) \end{aligned}$$

(ii) On a :
$$\begin{bmatrix} P(Z_{n+1}) \\ P(U_{n+1}) \\ P(D_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} P(U_n) \\ P(Z_n) + \frac{1}{2} P(U_n) + P(D_n) \\ \frac{1}{4} P(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(Z_n) \\ P(U_n) \\ P(D_n) \end{bmatrix}$$

Donc $C_{n+1} = M C_n$ avec $M = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$.

On a : $MC_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1$

et $MC_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = C_2$

La relation est vérifiée dans les cas $n=0$ et $n=1$.

(iii) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{“ } C_n = M^n C_0 \text{ ”}.$$

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $M^0 C_0 = I_3 C_0 = C_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
  Par la question précédente $C_{n+1} = MC_n$ et, par hypothèse de récurrence, $C_n = M^n C_0$, donc : $C_{n+1} = MM^n C_0 = M^{n+1} C_0$.
  et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin en notant Q_1, Q_2, Q_3 les colonnes de M^n, on a :

$M^n = \left[Q_1 \mid Q_2 \mid Q_3 \right]$ et : $C_n = M^n C_0 = \left[Q_1 | Q_2 | Q_3 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= 0.Q_1 + 0.Q_2 + 1.Q_3$

$= Q_3$

Donc C_n est la troisième colonne de M^n.

Partie II :

1) a) Soient $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 4y + 2z = b \\ -x + y - z = c \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} x + y - z = a \\ 4y + 2z = b \\ 2y - 2z = c + a \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 4y + 2z = b \\ -6z = 2a - b + 2c \end{cases}$$

Le système linéaire échelonné possède 3 pivots non nuls, la matrice P est donc inversible

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \\ y = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c \\ z = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b - \frac{1}{3}c \end{cases}$$

Donc $\underline{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}}$

b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$. On a :

$$PD = MP \iff \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ 0 & 4\lambda_2 & 2\lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\underline{D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}}$.

c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $M^n = PD^nP^{-1}$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car : $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = M^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = M^n \times PDP^{-1} && [\text{car } PD = MP \iff M = PDP^{-1}] \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} && [\text{par hypothèse de récurrence}] \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} && \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie} \end{aligned}$$

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) D'après I 3) d) (iii), C_n est la 3-ième colonne de M^n.

Or, pour $n \geqslant 1$, $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix}$ et, par la question précédente, $M^n = P D^n P^{-1}$, donc après calcul on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \; C_n = \begin{bmatrix} 1/6 + 1/3\left(-1/2\right)^n \\ 2/3 - 2/3\left(-1/2\right)^n \\ 1/6 + 1/3\left(-1/2\right)^n \end{bmatrix} \quad \text{et } C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La question I 3) d) (i) nous assure que :

$$\begin{cases} P(Z_{n+1}) = \frac{1}{4} P(U_n) \\ P(U_{n+1}) = P(Z_n) + \frac{1}{2} P(U_n) + P(D_n) \\ P(D_{n+1}) = \frac{1}{4} P(U_n) \end{cases}$$

cela se réécrit à l'aide des notations proposées : $\begin{cases} z_{n+1} = \frac{1}{4} u_n \\ u_{n+1} = z_n + \frac{1}{2} u_n + d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{4} u_n \end{cases}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \; z_n = \frac{1}{4} u_{n-1} = d_n$.

b) En utilisant les relations précédentes, on trouve, pour $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_n + \frac{1}{2} u_n + d_n \\ &= \frac{1}{4} u_{n-1} + \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{4} u_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} u_{n-1} \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc linéaire récurrente d'ordre deux.

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$

Son discriminant est $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} > 0$ et ses racines sont :

$$\frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = 1.$$

On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\underline{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \lambda\cdot 1^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

De plus : $u_0 = P(U_0) = 0$ et $u_1 = P(U_1) = 1$ d'où :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc : $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $z_n = d_n = \frac{1}{4}u_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On retrouve les résultats de la question II 1) d)

3) Comme $-\frac{1}{2} \in]-1;1[$, on sait que $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que :

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} P(Z_n) = \frac{1}{6}\ ;\ \lim_{n\to+\infty} P(U_n) = \frac{2}{3}\ ;\ \lim_{n\to+\infty} P(D_n) = \frac{1}{6}}$$