Correction DM n°7.

Exercice :

1) Cas $n=2$: $A = (P_1 \cap P_2) \cup (\overline{P_1} \cap P_2) \cup (P_1 \cap \overline{P_2})$.

Si Face n'est jamais suivi d'un autre Face, alors soit on obtient jamais Face (donc Pile puis Pile) soit on obtient exactement une fois Face sur les deux lancers (Pile puis Face ou Face puis Pile).

$$\begin{aligned}
P(A) &= P\left((P_1 \cap P_2) \cup (\overline{P_1} \cap P_2) \cup (P_1 \cap \overline{P_2})\right) \\
&= P(P_1 \cap P_2) + P(\overline{P_1} \cap P_2) + P(P_1 \cap \overline{P_2}) \quad [\text{par incompatibilité}] \\
&= P(P_1) \times P(P_2) + P(\overline{P_1}) \times P(P_2) + P(P_1) \times P(\overline{P_2}) \quad [\text{par indépendance}] \\
&= p^2 + (1-p)\,p + p\,(1-p) \\
&= p\,(2-p)
\end{aligned}$$

Cas $n=3$: $A = \underbrace{(P_1 \cap P_2 \cap P_3)}_{\text{aucun Face}} \cup \underbrace{(\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap \overline{P_3})}_{\text{exactement un Face}}$

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3) + P(P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3) \\
&\qquad [\text{par incompatibilité}] \\
&= P(P_1)P(P_2)P(P_3) + P(\overline{P_1})P(P_2)P(P_3) + P(P_1)P(\overline{P_2})P(P_3) + P(P_1)P(P_2)P(\overline{P_3}) \\
&\qquad [\text{par indépendance}] \\
&= p^3 + (1-p)\,p^2 + p\,(1-p)\,p + p^2\,(1-p) \\
&= p^3 + 3p^2(1-p) \\
&= p^2(3-2p)
\end{aligned}$$

2) Cas $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$: $A = \underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right)}_{\text{aucun Face}} \cup \underbrace{\left[\bigcup_{k=1}^{n} \overline{P_k} \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} P_i\right)\right]}_{\text{exactement une fois Face}}$

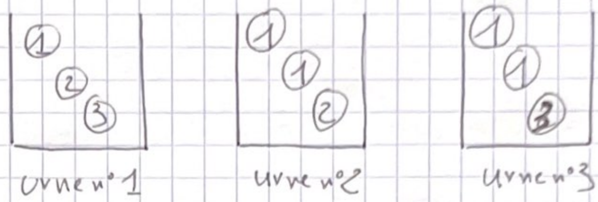
$$\begin{aligned}
P(A) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right) + \sum_{k=1}^{n} P\left(\overline{P_k} \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} P_i\right)\right) \quad [\text{par incompatibilité}] \\
&= \prod_{k=1}^{n} P(P_k) + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} P(P_i)\right) \times P(\overline{P_k}) \quad [\text{par indépendance}]
\end{aligned}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} p + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} p \right) \times (1-p)$$

$$= p^n + \sum_{k=1}^{n} p^{n-1}(1-p)$$

$$= p^n + n p^{n-1}(1-p).$$

Problème :



1) a) $a_1 = P(A_1) = \frac{1}{3}$; $b_2 = P(B_1) = \frac{1}{3}$; $c_1 = P(C_1) = \frac{1}{3}$.

b) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{A_1, B_1, C_1\}$ donne :

$$a_2 = P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) + P(C_1)P_{C_1}(A_2)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \frac{5}{9}$$

De même, on trouve $b_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0$

$$= \frac{2}{9}$$

$$c_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

c) La formule de Bayes nous assure que :

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1)}{P(B_2)} P_{B_1}(B_2) = \frac{1/3}{2/9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

2) $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) $P_{A_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{3}$ car si on obtient 1 au k-ième tirage, le $(k+1)$-ième tirage s'effectue dans l'urne 1 qui contient une boule numérotée 1 parmi trois boules.

$$P_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{2}{3}$$ car si on obtient 2 au k-ième tirage, le $(k+1)$-ième tirage s'effectue dans l'urne 2 qui contient deux boules numérotées 1 parmi trois boules.

$$P_{C_k}(A_{k+1}) = \frac{2}{3}$$ car si on obtient 3 au k-ième tirage, le $(k+1)$-ième tirage s'effectue dans l'urne 3 qui contient deux boules numérotées 1 parmi trois boules.

En appliquant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{A_k, B_k, C_k\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{k+1} = P(A_{k+1}) &= P(A_k)\,P_{A_k}(A_{k+1}) + P(B_k)\,P_{B_k}(A_{k+1}) + P(C_k)\,P_{C_k}(A_{k+1}) \\ &= \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k + \frac{2}{3}c_k. \end{aligned}$$

b) Comme $P_{A_k}(B_{k+1}) = \frac{1}{3}$ $\quad P_{B_k}(B_{k+1}) = \frac{1}{3}$ $\quad P_{C_k}(B_{k+1}) = 0$

et $P_{A_k}(C_{k+1}) = \frac{1}{3}$ $\quad P_{B_k}(C_{k+1}) = 0$ $\quad P_{C_k}(C_{k+1}) = \frac{1}{3}$

deux applications de la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{A_k, B_k, C_k\}$ donne :

$$b_{k+1} = P(B_{k+1}) = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k$$

$$c_{k+1} = P(C_{k+1}) = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}c_k.$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$\begin{cases} a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k + \frac{2}{3}c_k \\ b_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k \\ c_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}c_k \end{cases} \iff \overbrace{\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix}}^{X_{k+1}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}}^{X_k}$$

D'où : $$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$. Enfin on a bien $AX_0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = X_1$.

d) Récurrence classique (voir DM et DS précédents)

3) a) $M = A - \frac{1}{3} I_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) La formule de Pascal nous assure que $\binom{k+1}{j} = \binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}$.

c) Démontrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la proposition

$\mathcal{P}(k)$: " $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{0-j} M^j = \binom{0}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 M^0 = I_3 = A^0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

On a :

$$
\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k \times A \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j\right) \times \left(\frac{1}{3} I_3 + M\right) \quad \text{[par hypothèse de récurrence]} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \times \left(\frac{1}{3} I_3\right)\right] + \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \times M\right] \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1} \\
&\overset{i=j+1}{=} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-i} M^i \\
&= \binom{k}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} M^0 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \binom{k}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^0 M^{k+1} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} M^0 + \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right]\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \left(\frac{1}{3}\right)^0 M^{k+1} \\
&\overset{3)b)}{=} \binom{k+1}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} M^0 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \binom{k+1}{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^0 M^{k+1} \quad \text{[par 3) c)]} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

⑤

- Par le principe de récurrence $P(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4) a) La formule du binôme de Newton nous assure que :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{k} = 1^{k} = 1$$

et $$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-\frac{2}{3}\right)^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} = \left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{k} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}.$$

b) Par 3) c), on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j}$.

Etant donnés les coefficients de la première colonne de M^{j}, on obtient que les coefficients de la première colonne de A^{k} sont :

- $$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^{j} + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^{j}}{4}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^{j} \overset{4)a)}{=} \boxed{\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right)}$$

- $$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{j} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{j}}{4}\right) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^{j} \overset{4)a)}{=} \boxed{\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right)}$$

La première colonne de A^{k}, pour $k \in \mathbb{N}$, est $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \\ \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \\ \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \end{bmatrix}$

Enfin comme : $\forall k \in \mathbb{N},\ X_k = A^{k} X_0 = A^{k}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ par 2) d), X_k est la première colonne de A^{k} et on obtient le résultat cherché.

c) $P(A_k) = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ et $P(B_k) = P(C_k) = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{4}$ (car $-\frac{1}{3} \in]-1,1$