Devoir maison n°7, à rendre le lundi 11 mars 2024

Exercice

On réalise $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ lancers successifs d'une pièce de monnaie et on note les résultats obtenus.
La probabilité d'obtenir Pile est notée $p \in [0,1]$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, on note P_k l'événement « Obtenir Pile au k-ième lancer ».
L'objectif est de calculer la probabilité de l'événement

$$A : \text{« Au cours des } n \text{ lancers, Face n'est jamais suivi d'un autre Face »}$$

<u>*Précisions :*</u> *Face n'est jamais suivi d'un autre Face, signifie que si l'on obtient un Face tous les lancers suivants donnent Pile.*

1. Ecrire l'événement A à l'aide des événements P_k dans le cas $n = 2$ puis calculer $P(A)$.
   Faire de même dans le cas $n = 3$.
2. Généraliser pour $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ quelconque. On pourra écrire l'événement A à l'aide des événements P_k et de « points-points », puis on pourra <u>éventuellement</u> chercher à l'écrire sous une forme plus compacte. Ensuite, on calculera $P(A)$.

Problème (D'après un sujet EDHEC)

On dispose de trois urnes. L'urne n°1 contient trois boules numérotées de 1 à 3, l'urne n°2 contient deux boules portant le numéro 1 et un boule portant le numéro 2 et enfin, l'urne n°3 contient deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 3.

On procède à des tirages successifs avec remise d'une boule dans ces urnes selon le protocole suivant :

- Le premier tirage s'effectue dans l'urne n°1 ;
- A l'issue de chaque tirage, on décide de faire le tirage suivant dans l'urne portant le numéro indiqué sur la boule tirée au tirage précédent. Par exemple : si la boule tirée au troisième tirage porte le numéro 2 alors le quatrième tirage se fait dans l'urne n°2.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ les événements

- A_k : « le k-ième tirage amène une boule numérotée 1 »
- B_k : « le k-ième tirage amène une boule numérotée 2 »
- C_k : « le k-ième tirage amène une boule numérotée 3 »

On note a_k, b_k et c_k leurs probabilités respectives.

1. (a) Donner, sans justifications, les valeurs de a_1, b_1 et c_1.
   (b) Déterminer les valeurs de a_2, b_2 et c_2.
   (c) On constate à l'issue du deuxième tirage que la boule tirée porte le numéro 2.
   Quelle est la probabilité que le premier tirage ait amené une boule numérotée 2 ?
2. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $X_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}$.
   (a) Donner X_0.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Donner, en les justifiant par une phrase, les probabilités $P_{A_k}(A_{k+1})$, $P_{B_k}(A_{k+1})$ et $P_{C_k}(A_{k+1})$. En déduire que $a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k + \frac{2}{3}c_k$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Déterminer de la façon similaire les expressions de b_{k+1} puis c_{k+1} en fonction de a_k, b_k et c_k.
   (d) Déterminer la matrice A carrée d'ordre 3 telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $X_{k+1} = AX_k$.
   (e) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $X_k = A^{k-1}X_1$.

3. (a) Ecrire la matrice M carrée d'ordre 3 définie par $M = A - \frac{1}{3}I_3$.

   (b) Soient $k, j \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ tels que $1 \leqslant j \leqslant k$. Justifier que $\binom{k+1}{j} = \binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}$.

   (c) Démontrer par récurrence (sans utiliser la formule du binôme) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

4. (a) Calculer $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}$ et $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-\frac{2}{3}\right)^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}$.

   On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les coefficients de la première colonne de M^k sont donnés par :

$$M^k = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^k + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^k & \times & \times \\ \left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(-\frac{2}{3}\right)^k & \times & \times \\ \left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(-\frac{2}{3}\right)^k & \times & \times \end{bmatrix}$$

   Un des exercices de révisions consiste à établir ce résultat, voir le travail des vacances d'Hiver.

   (b) En utilisant les questions 3.(c) et 4.(a), déterminer les coefficients de la première colonne de A^k, vérifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad P(A_k) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(B_k) = P(C_k) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

   (c) Calculer la limite quand k tend vers l'infinie de $P(A_k)$, $P(B_k)$ et $P(C_k)$.

   Que peut-on en déduire si l'on effectue une infinité de tirages ?

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆