Correction DM n° 8

1) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables (car fonctions puissances) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n'(x) = n x^{n-1} - \dfrac{n}{x^{n+1}} = \dfrac{n(x^{2n}-1)}{x^{n+1}}$.
Sur $\mathbb{R}_+^*$ le signe de f_n' est le signe de $x^{2n}-1$, ainsi f_n' s'annule en 1 et est strictement positive sur $]1;+\infty[$ et strictement négative sur $]0;1[$.
On en déduit que <u>f_n est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et strictement décroissant sur $]0;1[$.</u>

2) La fonction f_n est continue (car dérivable) sur $]0,1[$ (resp. $]1;+\infty[$) et strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur cet intervalle.
Le Théorème de la bijection continue strictement monotone nous assure que f_n réalise une bijection de $]0,1[$ sur $f(]0,1[) =]f(1), \lim_{x\to 0} f(x)[$ ie $]3;+\infty[$ (resp. de $]1;+\infty[$ sur $f(]1;+\infty[) =]f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$ ie $]3;+\infty[$). Comme $4 \in]3;+\infty[$, l'équation $f(x)=4$ unique solution $u_n \in]0;1[$ (resp. $v_n \in]1;+\infty[$).
Donc <u>l'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ (u_n et v_n) et $0 < u_n < 1 < v_n$.</u>

3) a) Soit $x>0$ et $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - \left(x^n + 1 + \frac{1}{x^n}\right)$$

$$= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On sait que $v_n > 1$, ainsi $v_n^{2n+1} - 1 > 0$ et $v_n - 1 > 0$,

Par conséquent $f_{n+1}(v_n) - f_n(v_n) = \dfrac{(v_n - 1)(v_n^{2n+1} - 1)}{v_n^{n+1}} \geq 0$

et donc : $f_{n+1}(v_n) \geq f_n(v_n)$ ie $\underline{f_{n+1}(v_n) \geq 4}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a : $f_{n+1}(v_n) \geq 4$ ie $f_{n+1}(v_n) \geq f_{n+1}(v_{n+1})$.

Comme $v_n, v_{n+1} \in]1; +\infty[$ et que f_{n+1} est <u>strictement</u> croissante sur $]1; +\infty[$,

on a : $f_{n+1}(v_n) \geq f_{n+1}(v_{n+1}) \iff v_n \geq v_{n+1}$.

D'où <u>(v_n) décroissante.</u>

4) a) La suite (v_n) est minorée par 1 et décroissante, elle converge par le Théorème de la limite monotone vers $l \geq 1$.

b) Raisonnons par l'absurde et supposons que $l > 1$.

Comme (v_n) est décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ $1 < l \leq v_n$

et donc : $1 < l^n \leq v_n^n$. Comme $l^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ $(l > 1)$, le Théorème de minoration nous assure que $\underline{v_n^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$.

D'autre part, la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $f_n(v_n) = v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} = 4$

nous assure que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(v_n) = 4$, mais comme $v_n^n \to +\infty$ on devrait également avoir $f_n(v_n) = v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Il y a donc contradiction et $l = 1$.

c) Par le point précédent : $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a : $\underline{1 < v_n < 3^{1/n}} \iff f_n(1) < f_n(v_n) < f_n(3^{1/n})$ [par stricte croissance de f_n sur $]1; +\infty[$]

$\iff 3 < 4 < 4 + \dfrac{1}{3}$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est par équivalence

On a : $3^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln 3\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0) = 1$, le Théorème d'encadrement nous assure que $\underline{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Par 3) a), on a : $f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$ ie $f_{n+1}(u_n) \geq 4$, ou encore $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme $u_n, u_{n+1} \in]0;1[$ et f_{n+1} strictement décroissante sur $]0;1[$, on a :

$$f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1}) \iff u_n \leq u_{n+1}.$$

La suite $\underline{(u_n) \text{ est croissante}}$. Comme, de plus, elle est majorée par 1 elle converge par le Théorème de la limite monotone vers $l \leq 1$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $l < 1$. On aurait alors $0 < u_n \leq l < 1$ puis $0 < u_n^n \leq l^n < 1$. Comme $l^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(0 < l < 1)$ le Théorème d'encadrement nous assure que $\underline{u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+}$.

D'autre part, la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $f_n(u_n) = u_n^n + 1 + \frac{1}{u_n^n} = 4$ nous assure que $f_n(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$, mais comme $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, on devrait également avoir $f_n(u_n) = u_n^n + 1 + \frac{1}{u_n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Il y a donc contradiction et $l = 1$. En conclusion : $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$