ECG

Devoir maison n°8, à rendre le mardi 2 avril 2024

Etude d'une suite définie implicitement

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x > 0, \quad f_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f_n(x) = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^\star$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
3. (a) Démontrer que :
$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad f_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est décroissante.
4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geqslant 1$.
   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.
   (c) En déduire la limite de (v_n).
5. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $1 < v_n < 3^{1/n}$. Retrouver le résultat de la question 4. (c).
6. **Facultatif :** Faire l'étude de la monotonie et de la convergence de (u_n). Précisez la limite de (u_n) si elle existe.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆

ECG

Devoir maison n°8, à rendre le mardi 2 avril 2024

Etude d'une suite définie implicitement

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x > 0, \quad f_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f_n(x) = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^\star$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
3. (a) Démontrer que :
$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad f_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est décroissante.
4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geqslant 1$.
   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.
   (c) En déduire la limite de (v_n).
5. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $1 < v_n < 3^{1/n}$. Retrouver le résultat de la question 4. (c).
6. **Facultatif :** Faire l'étude de la monotonie et de la convergence de (u_n). Précisez la limite de (u_n) si elle existe.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆