Devoir maison n°9, à rendre le mardi 2 mai 2023

Exercice n°1 : Etude d'une première suite implicite

On considère une fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$ définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. On résume les variations de f dans le tableau ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{\text{On rappelle que : } \quad 2 < e < 3}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, telles que $0 < u_n < 1 < v_n$.

   Indication : On appliquera deux fois, sur deux intervalles à préciser, le théorème de la bijection continue strictement monotone. Dans chaque cas, on vérifiera chacune des hypothèses de ce théorème.

2. Dans cette question, on détaille l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}}$:
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}}$ est décroissante.

   Indication : Quelle inégalité est à démontrer ? Comment utiliser f pour démontrer cette inégalité ?

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}}$ converge. On note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}}$. Justifier que $\ell \in [0,1]$.

   (c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $\dfrac{e^{\frac{u_n}{2}}}{\sqrt{u_n}} = n$.

   (d) Dans cette question, on suppose que $\ell > 0$.
   A l'aide de l'égalité de la question précédente, montrer que l'hypothèse $\ell > 0$ est absurde.

   (e) Conclure quant à la valeur de ℓ.

3. En reprenant les mêmes idées qu'à la question précédente, on veut étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}}$:
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}}$ est croissante.

   (b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°2 : Etude graphique et analytique d'une seconde suite implicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définit sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = e^x + nx^2 - 3.$$

L'objectif de ce problème est de justifier l'existence puis d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n) des solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.

Partie I : Etude graphique de la suite (u_n) avec Python

1. Ecrire un programme Python permettant de représenter sur un même graphique les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_{27} et f_{1000} avec pour fenêtre $[0, 2]$ sur l'axe des abscisses et $[-2, 2]$ sur l'axe des ordonnées. Cette représentation doit comporter une grille, un titre et une légende.
   Tester votre script sur `https://trinket.io/features/python3`

Graphiquement, on peut observer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0, 2]$, qu'on note u_n.

2. Par lecture graphique, conjecturer le sens de variation, la convergence et la limite de (u_n).

L'objectif de la partie II est de justifier l'ensemble des résultats conjecturés dans la partie I.

Partie II : Etude analytique de la suite (u_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation complet de f_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ possède une unique solution qu'on notera u_n.
5. Déterminer la valeur de u_0.

Dorénavant, on supposera que $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$.

6. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $u_n \in]0, 1[$.
7. **Etude de la monotonie de (u_n)**
   Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $f_n(x) < f_{n+1}(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).
8. **Etude du comportement asymptotique de (u_n)**
   (a) **Méthode n°1 : Par l'absurde**
      (i) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite. Justifier que $\ell \in [0, 1]$.
      (ii) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
      Calculer la limite de $e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et aboutir à une contradiction.
      (iii) Conclure quant à la valeur de ℓ.
   (b) **Méthode n°2 : Par encadrement**
      (i) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $0 < u_n < \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.
      (ii) En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

⋆ ⋆ ⋆ Fin du sujet ⋆ ⋆ ⋆