Correction DM n° 9

Exercice 1

1) $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \underline{\ln 2}.$

$u_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = \underline{1 - \ln 2}.$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a : $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x} dx$ [par linéarité]

$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1+x)}{1+x} dx$

$= \int_0^1 x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}.$

3)
```
import numpy as np
def suite1(n) :
    u = np.log(2)
    for k in range(1,n):
        u = 1/k - u
    return u
```

4) (a) Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\frac{x^{n-1}}{1+x} \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx \geq 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$u_{n+1} - u_n \overset{\text{lin.}}{=} \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} dx.$

Or : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} \leq 0$ (car $x - 1 \leq 0$)

donc, par croissance de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} dx \leq 0$

<u>Conclusion :</u> $(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante.

Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est minorée par 0, elle converge par le théorème de la limite monotone vers un réel $l \geqslant 0$.

(c) Raisonnons par l'absurde et supposons que $l > 0$. Par 2), on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, on a $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et donc $u_{n+1} + u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2l$. D'autre part $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $2l = 0$ ie $l = 0$. Il y a contradiction et donc $\underline{l = 0}$.

5) (a) Soit $x \in [0,1]$. On a : $0 \leqslant x \leqslant 1$, puis $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$ et enfin $\underline{\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$, donc $\dfrac{x^{n-1}}{2} \leqslant \dfrac{x^{n-1}}{1+x} \leqslant x^{n-1}$. Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{2}\,dx \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 x^{n-1}\,dx$$

ie $\left[\dfrac{x^n}{2n}\right]_0^1 \leqslant u_n \leqslant \left[\dfrac{x^n}{n}\right]_0^1$ ou encore : $\underline{\dfrac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}}$.

Comme $\dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème d'encadrement nous assure que $\underline{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } 0}$.

6) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $u_n = (-1)^n\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right) - \ln 2\right]$ "

- $\mathcal{P}(2)$ vraie car : $(-1)^2\left[\left(\sum_{k=1}^{1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right) - \ln 2\right] = 1 - \ln 2 = u_2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par 2) on a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} - u_n = \dfrac{1}{n} - (-1)^n\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right) - \ln 2\right]$ [par hypothèse de récurrence]

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{n} + (-1)^{n+1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) - \ln 2\right] \quad \left[\text{car } (-1)^{2n+2} = 1\right]$$

$$= (-1)^n\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) - \ln 2\right]$$

$$\boxed{= (-1)^{n+1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) - \ln 2\right]}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

En utilisation la convention : $\forall n,p \in \mathbb{N}$ tels que $n<p$, $\sum_{k=p}^{n} u_k = 0$.

ie $\sum_{k\in\emptyset} u_k = 0$, on a :

$$(-1)^1\left[\left(\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) - \ln 2\right] = (-1)\left[0 - \ln 2\right] = \ln 2 = u_1.$$

Donc la relation est bien vérifiée lorsque $n=1$.

7)
```
import numpy as np
def suite2(n) :
    S = 0
    for k in range(1,n) :
        S += (-1)**(k+1)/k
    return (-1)**n(S-np.log(2))
```

8) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) - \ln 2\right| = |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par 4) 5).}$$

Donc $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\ln 2$. En particulier : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

Exercice n°2 :

1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \longmapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $[n;+\infty[$, comme composée de $t \longmapsto \sqrt{t}$ continue sur $[n;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et exp continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent cette fonction possède une primitive F sur $[n;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in [n;+\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}}\,dt = F(x) - F(n).$$

Comme F dérivable à dérivée continue sur $[n;+\infty[$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n;+\infty[$ et, de plus :

$$\forall x \in [n;+\infty[, \; f_n'(x) = F'(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall x \in [n;+\infty[, \; f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0.$

Donc f_n est strictement croissante sur $[n;+\infty[$.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \geqslant n$ et $t \in [n,x]$. On a :

$n \leqslant t$ d'où $\exp(\sqrt{n}) \leqslant e^{\sqrt{t}}$.

Par croissance de l'intégrale : $\int_n^x e^{\sqrt{n}}\,dt \leqslant \int_n^x e^{\sqrt{t}}\,dt$ ie $(x-n)e^{\sqrt{n}} \leqslant f_n(x)$.

Comme $(x-n)\,e^{\sqrt{n}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, le théorème de minoration nous assure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

(d) La fonction f_n est continue (car $\mathcal{C}^1$) sur $[n;+\infty[$ et strictement croissante sur cet intervalle. Le théorème de la bijection continue strictement monotone nous assure que f_n réalise une bijection de $[n;+\infty[$ sur $[f_n(n), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[= [0;+\infty[$. Comme $1 \in [0;+\infty[$, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution, notée u_n, sur $[n;+\infty[$.

2) (a) On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant u_n$.

Comme $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, le théorème de minoration nous assure que

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [n ; u_n]$. On a : $n \leqslant t \leqslant u_n$

puis $e^{\sqrt{n}} \leqslant e^{\sqrt{t}} \leqslant e^{\sqrt{u_n}}$. Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}}\, dt \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}\, dt \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}}\, dt$$

ie $(u_n - n)\, e^{\sqrt{n}} \leqslant f_n(u_n) \leqslant (u_n - n)\, e^{\sqrt{u_n}}$

ou encore $(u_n - n)\, e^{\sqrt{n}} \leqslant 1 \leqslant (u_n - n)\, e^{\sqrt{u_n}}$.

L'inégalité de gauche donne : $u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.

L'inégalité de droite donne : $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n$.

Donc : $\underline{e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}}$.

3) (a)

```
import numpy as np
n = 0
while np.exp(-np.sqrt(n)) > 10**(-4) :
    n = n+1
print(n)
```

(b) On a : $\underline{e^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4}} \iff \sqrt{n} \geqslant 4 \ln 10$

$\iff \underline{n \geqslant 16 (\ln 10)^2}$

Or : $16 (\ln 10)^2 \simeq 16 (2{,}3)^2 = 84{,}64$.

Donc $\underline{n \geqslant 85}$

4) (a) On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par 2)(a), on a : $e^{-\sqrt{u_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Le Théorème d'encadrement nous assure que $\underline{u_n - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ ie $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) Soit $x \geqslant -1$. On a : $1+\frac{x}{2} \geqslant 0$ et donc :

$$\underline{\sqrt{x+1} \leqslant 1+\frac{x}{2}} \iff 1+x \leqslant \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \quad \left[\begin{array}{l}\text{par stricte croissance de la}\\ \text{fonction carré sur } \mathbb{R}_+\end{array}\right]$$

$$\iff 1+x \leqslant 1+x+\frac{x^2}{4}$$

$$\iff 0 \leqslant \frac{x^2}{4}.$$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est par équivalence.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. On a :

$$\exp(-\sqrt{u_n}) \geqslant \exp(-\sqrt{n})\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$$

$$\iff -\sqrt{u_n} \geqslant -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \quad \left[\text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^{>0}\right]$$

$$\iff \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$$

$$\iff \sqrt{\frac{u_n}{n}} \leqslant 1+\frac{v_n}{2n}$$

$$\iff \underline{\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \leqslant 1+\frac{v_n}{2n}} \quad \left[\text{car } \frac{u_n}{n} = \frac{v_n+n}{n} = 1+\frac{v_n}{n}\right]$$

Comme $v_n \geqslant 0$ (car $u_n \geqslant n$), $\frac{v_n}{n} \in [-1;+\infty[$ et la dernière inégalité est vraie par 4)(b), donc la première l'est par équivalence.

(d) De 2)(b), on déduit que : $e^{-\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.

Donc : $\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{u_n-n}{e^{-\sqrt{n}}} \leqslant 1$. Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par 4)(a), on a : $\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ et le théorème d'encadrement nous assure que

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n-n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1.}$