Devoir maison n°9, à rendre le mardi 14 mai 2024

Exercice n°1 Etude d'une suite d'intégrales

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire une fonction Python `suite1(n)` prenant en argument un entier positif non nul n et renvoie u_n.
4. On cherche à étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ de deux façons différentes.

   Méthode n°1 : en utilisant la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $u_n \geqslant 0$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ est décroissante. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.

   (c) En utilisant la relation de la question 2. et en raisonnant par l'absurde, justifier que $\ell = 0$.
5. **Méthode n°2 : en utilisant un encadrement de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\dfrac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2n-2}$ puis, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$.
6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, on a l'égalité :

$$u_n = (-1)^n \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \ln(2) \right].$$

   Cette égalité reste-t-elle vraie lorsque $n = 1$?
7. En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente, écrire une fonction Python `suite2(n)` prenant en argument un entier n et qui renvoie u_n.
8. Déduire de ce qui précéde que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et déterminer sa somme.

$-->$ **Tournez la page**

Exercice n°2 Fonctions définies une intégrale, suite implicite

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Etude de f_n.
   (a) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout $x \in [n, +\infty[$.
   (b) Donner le sens de variation de f_n.
   (c) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (d) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

La suite de cet exercice est facultative

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) Utiliser la question 2.(b) pour compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
import numpy as np
n=0
while.....
     n=.....
print(n)
```

   (b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.
4. On pose $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
   (b) Etablir que, pour tout réel supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.
   (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
   (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.(b) la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}}$.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆