$\boxed{\text{Devoir surveillé n°1, lundi 21 décembre 2020}}$

Durée : 4 heures

- L'utilisation de toute calculatrice est interdite.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
- Les étudiants sont invités à **encadrer les résultats de leurs calculs ou raisonnements**.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Dans un exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Exercice n°1 Manipulation de puissances - Résolution d'(in)équations

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $\dfrac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $|2 - x| + |2x + 4| \leqslant 5$.
3. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{1 - x} \leqslant x + 1$.

Exercice n°2 Trigonométrie - Manipulation de racines carrées

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos a$. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
2. Rappeler la relation du formulaire concernant $\sin(2a)$.
   <u>En utilisant cette relation et le résultat de la question précédente</u>, déterminer la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
3. Montrer que $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.
4. En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice n°3 Etudier une inégalité portant sur des entiers

<u>Etudier</u>, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n) : n^2 + 5 \leqslant 3^n$.

Exercice n°4 Etablir une inégalité à l'aide d'une étude de fonction

1. (a) Enoncer la définition d'une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.
   (b) Enoncer la première inégalité triangulaire.
2. Montrer que la fonction f ci-dessous est croissante :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x} \end{array}$$

3. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Exercice n°5 Etude d'une fonction

L'objectif de ce problème est de réaliser l'étude complète de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Données numériques : $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln(10) \simeq 2,3$.

- **Les parties 1 et 2 sont indépendantes mais leurs résultats servent dans la partie 3.**
- **Les questions 1. et 2. la partie 1 sont utiles pour les questions 2. et 4. de la partie 3.**

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
   Proposer une interprétation graphique de ce résultat.

Partie 2 : Etude d'une fonction auxiliaire

On cherche à étudier la fonction $\boxed{g : x \longmapsto \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}$.

1. Justifier que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction g est paire. Que peut-on en déduire concernant son domaine d'étude ?
3. Calculer la dérivée de g, puis dresser le tableau de variation de g (vous préciserez les limites aux bornes du domaine d'étude).
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g au point d'abscisse 3.
5. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée, tracer l'allure de $\mathscr{C}_g$ (vous représenterez les (éventuelles) tangentes et asymptotes utiles à la réalisation de ce graphique).
6. Soit $k \in \mathbb{R}$. A l'aide de la question précédente, déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) en fonction de k.
7. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 1$ sur $]0; +\infty[$. A l'aide de la question 5. déterminer graphiquement une valeur approchée de α, puis dresser la tableau de signe de g sur $[0; +\infty[$.

Partie 3 : Etude de la fonction f

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
2. Rappeler à la définition de la dérivabilité en un point pour une fonction.
3. Justifier, par un calcul de limite, que f est également dérivable en 0 et donner $f'(0)$. En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet une tangente (T) au point d'abscisse 0 qui a pour équation $(T) : y = x$.
4. Etudier les variations de f (vous préciserez les limites aux bornes du domaine d'étude).
   Indication : Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $1 + x^2 = x^2\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right)$.
5. Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T).
6. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée, tracer l'allure de f (vous représenterez les (éventuelles) tangentes et asymptotes utiles à la réalisation de ce graphique).

Exercice n°6 Inégalités faisant intervenir une suite classique

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
   A l'aide du résultat de la question 2., montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$: $u_n \geqslant u_{n-1}$.
   Indication : On pourra remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $\dfrac{n}{n-1} = 1 + \dfrac{1}{n-1}$.
4. En appliquant l'inégalité de la question 1., montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^{2n} \geqslant \dfrac{1}{4}$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_{2n} \leqslant 4$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆