DS n°1 de Mathématiques
Lundi 13 septembre 2021, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

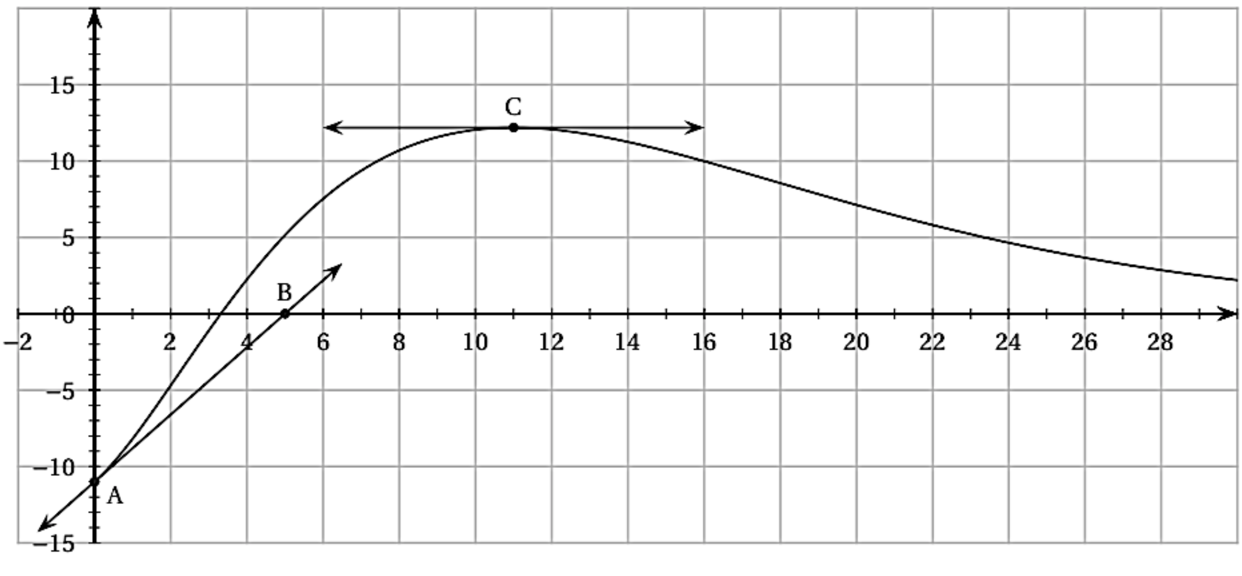
- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les fonctions

Exercice n°1 : Lectures graphiques (inspiré Bac 2019 Amérique du Nord)

Dans le repère orthogonal ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ est le graphe de la fonction f définie et dérivable sur $[0;30]$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0 passe par le point $B\,(5;0)$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C d'abscisse 11 est parallèle à l'axe des abscisses.
L'équation $f(x)=0$, d'inconnue $x \in [0;30]$, possède pour unique solution $\sqrt{11}$.



Dans toute la suite, on note f' la dérivée de la fonction f sur $[0;30]$ et F une primitive de f sur $[0;30]$.

1. Lire graphiquement les valeurs de $f'(0)$ et $f'(11)$ (aucune justification n'est attendue).
2. Par lecture graphique et sans justification, donner le signe de $f'(x)$ sur $[0;30]$.
3. Par lecture graphique et sans justification, donner les variations de F sur $[0;30]$.
4. On note $I = \displaystyle\int_8^{14} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **a)** Donner l'interprétation géométrique de I.
   - **b)** Lire graphiquement un encadrement du nombre I entre deux entiers. Des explications sont attendues.

Exercice n°2 : Utiliser les variations de la fonction dérivée (inspiré Bac 2019 Métropole)

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
f'	30 ↘	-5 ↗	20

1. Combien de tangentes horizontales la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet-elle ? Une justification à l'aide d'un théorème vu en terminale est attendue.
2. Donner un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Une justification est attendue.

Exercice n°3 : Calculs de dérivées

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée sur l'ensemble donné :

1. $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^\star$.
2. $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$.
3. $f(x) = \dfrac{1-2x}{-3x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}/\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.
4. $f(x) = \ln(1+2e^x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. $f(x) = e^{x^3-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice n°4 : Une étude de fonction (inspiré Bac 2019 Métropole)

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [0;30]$ par

$$f(x) = (5-2x)e^{-\frac{x}{5}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;30]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A : Variations et convexité

1. Calculer f'.
2. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;60]$.
3. Calculer f''.
4. Etudier la convexité de f. Justifier que $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion.

Partie B : Tangentes et graphe

1. Justifier que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -3x+5$.
2. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique $0,5$ cm en abscisse et 2 cm en ordonnée : tracer T, tracer le(s) éventuelle(s) tangente(s) horizontale(s) et tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.

   Valeurs numériques : on pourra utiliser $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,22$ *et* $\dfrac{1}{e^6} \approx 0,002$.
3. Sans déterminer son équation, représenter la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'inflexion.

Partie C : Primitives et calcul d'une intégrale

On considère la fonction F définie pour tout $x \in [0;30]$ par $F(x) = (10x+25)e^{-\frac{x}{5}}$.

1. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0;30]$.
2. La fonction f possède-t-elle d'autres primitives sur l'intervalle $[0;30]$? Si oui, les donner.
3. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{30} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Les suites

Exercice n°5 : Modélisation et étude d'une suite (inspiré Bac 2019 Centres étrangers)

Afin de conserver au fil des années un parc en bon état, un loueur de vélos se sépare chaque hiver de 20% de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos.
On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock de ce loueur au 1$^{\text{er}}$ juillet de l'année $(2018+n)$.
Au 1$^{\text{er}}$ juillet de l'année 2018, le loueur possède 150 vélos. Ainsi $u_0 = 150$.

1. **a)** Déterminer le nombre de vélos dans le stock du loueur au 1$^{\text{er}}$ juillet 2019.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 175$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

c) Le loueur peut-il un jour espérer atteindre un parc de 200 vélos ? Si oui, au bout de combien d'années ?

3. On considère l'algorithme suivant :

$n \to 2018$

$u \to 150$

Tant que $u <= 160$:

  $n \to n+1$

  $u \to u * 0.8 + 35$

Fin tant que

A la fin de l'algorithme, la variable n indique la valeur 2021.
Comment interpréter ce résultat ?

4. Déterminer à l'aide d'un calcul l'ensemble des entiers naturels n tels que : $u_n > 170$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Valeur numérique : on pourra utiliser $\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} \approx 7,2$.

Les probabilités

Exercice n°6 : Calculs de probabilités, variable aléatoire (inspiré Bac 2019 Antilles-Guyane)

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- **Etape 1 :** chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;
- **Etape 2 :**
  - **a)** s'il découvre un numéro de 1 à 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile ;
  - **b)** sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont 2 secteurs contiennent une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Partie A

Un client joue à ce jeu. On note : N l'événement « le client découvre un numéro de 1 à 15 », et E l'événement « le client obtient une étoile ».

1. Représenter le jeu à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.
3. Justifier que la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0,38$.
4. Le client a gagné un bon d'achat. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape ?

Partie B

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros. Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 400 euros par tranches de 100 clients y participant. Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel. On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achats gagnés.

1. Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres. On précisera la loi de X.
2. Expliciter la probabilité qu'il n'y ait aucun gagnant.
3. Expliciter la probabilité qu'il y ait au plus un gagnant.
4. Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ? Le budget prévisionnel est-il suffisant ?

$\star\star\star$ **Fin du sujet** $\star\star\star$