

# DS N°1 DE MATHÉMATIQUES

## Lundi 18 Septembre 2023, de 8h à 11h

*Calculatrice non autorisée*

**Éléments de présentation de la copie :** Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faites au brouillon.
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le barre le contenu. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

### Calcul algébrique élémentaire

**Exercice n°1 :**

Les 4 questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément. Tous les calculs et justifications doivent apparaître sur votre copie.

1. Mettre les fractions suivantes sous la forme d'une seule fraction irréductible. Ici  $x$  est un réel qui n'annule pas les dénominateurs.

a)  $\frac{105}{70}$

c)  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{12}$

e)  $\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x}$

b)  $3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{7}$

d)  $\frac{4x}{2x-1} - \frac{2x+1}{x}$

f)  $\frac{1 - 1/(x+2)}{1/x + 1}$

2. Ecrire les nombres suivants sous la forme  $a\sqrt{b}$  où  $b$  est un entier positif le plus petit possible ( $b$  peut être égal à 1).

a)  $7\sqrt{11^3 \times 5^2}$

c)  $\frac{\sqrt{504}}{3\sqrt{28}}$

d)  $(7\sqrt{6} + 8)(7\sqrt{6} - 8)$

b)  $\sqrt{126}$

e)  $7\sqrt{12} + 14\sqrt{48}$

3. Ecrire les nombres suivants sous la forme  $a^n$  où  $a$  est un entier **positif** le plus petit possible et  $n$  un entier relatif.

a)  $(-7)^{-4} \times 7^3$

c)  $2 \times 3^n + 3^n$

b)  $\left(\frac{15^2 \times 15^{11}}{15^{10} \times 15^6}\right)^9$

d)  $4^{n+1} + 2^{2n}$

4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Traduire en termes d'inégalités les relations suivantes :

a)  $x \in ]-19; +\infty[$

b)  $x \in [-3; 2[$

c)  $x \in ]-\infty; -1] \cup ]2; 3]$

Traduire en termes d'intervalles les inégalités suivantes :

d)  $-3 \leq x$

e)  $2 < x \leq 10$

f)  $x < 0$  ou  $x > 2$

**Exercice n°2 :**

1. Rappeler les 3 identités remarquables du second degré.
2. Factoriser « au maximum » les expressions suivantes :

a)  $A(x) = 3x - 12x^2$

c)  $C(x) = (3x + 3)^2 - 9x^2$

b)  $B(x) = x^2 - 2x + 1 - (x - 1)(2x + 3)$

d)  $D(x) = (2 - x)(x + 1) - (2x - 4)(x + 3) + (2x + 1)(x - 2)$

## Equations et inéquations

**Exercice n°3 :**Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ Il est interdit d'utiliser le discriminant pour les équations **1.3.4.6.**

1.  $2 + x^2 = 4$

3.  $9(x - 1)^2 = 81$

5.  $4x^4 - 12x^2 - 1 = 0$

2.  $3x(x - 1) = x(x + 2) - 3$

4.  $(3x + 1)(-5x + 9) = (3x + 1)^2$

6.  $\frac{1}{x - 1} = x + \frac{1}{x^2 - 1}$

**Exercice n°4 :**Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

1.  $27x^2 > 9$

3.  $(2x + 1)^2 \leq (x^2 - 1)^2$

2.  $x^2 + 2x + 5 > -x + 15$

4.  $\frac{-3x}{x + 2} > \frac{2}{3 - x}$

## Polynômes

**Exercice n°5 :**On considère le polynôme  $P$  défini par :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ .

1. Déterminer les réels
- $a, b, c \in \mathbb{R}$
- tels que, pour tout
- $x \in \mathbb{R}$
- , on a :

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

2. Factoriser « au maximum » le polynôme
- $P$
- .
- 
3. En déduire les solutions de l'inéquation
- $x^6 - 5x^2 < 6 - 2x^4$
- .

\*\*\* Fin du sujet \*\*\*